Zur

# öffentlichen Prüfung der Schüler

des

# Königl. Friedrichsgymnasiums

zu

GUMBINNEN

am

**29. und 30. September d. J.**

ladet ergebenst ein

Prof. Dr. **J. Arnoldt,**

Director.



Inhalt: 1. Analytische Miscellen. Zweiter Theil. Von Prof. Julius Sperling.
2. Jahresbericht des Directors.

**Gumbinnen 1864.**
Gedruckt bei Fr. Krauseneck und Sohn.

# Analytische Miscellen.

## Stroma II.

### VI.

In der Lehre von den Combinationen (Syntaktik), so weit man diese für den Schulgebrauch zugerichtet findet, werden bei demjenigen Theile, welcher dem Permutiren und den daraus hervorgehenden Complexionen gewidmet ist, in den gangbaren Lehrbüchern die beiden Instruktionen vermisst,

1) zu berechnen, die wievielste Complexion eine gegebene in der involutorisch geordneten Reihenfolge sämmtlicher Mitcomplexionen ist, und

2) wenn die Stellenzahl einer Complexion voraus bestimmt ist, die Ordnung ihrer Elemente zu finden.

Zur Erläuterung des Verfahrens hierbei erlaube ich mir — im Hinblick auf ein mögliches Bedürfniss einzelner Leser — einiges Bekannte voraus zu schicken:

Ziffern, Buchstaben, Farben und überhaupt irgend welche Dinge, die sinnlich oder in der Phantasie einer in der Reihenfolge oder Anordnung unterscheidbaren Zusammenstellung fähig sind, nennt die hierauf bezügliche mathematische Theorie Elemente, die Zusammenstellung selbst eine Complexion, oder mit Rücksicht auf die Aenderung der natürlichen oder der primitiven Ordnung (bei Zahlen: 1, 2, 3, 4 etc., bei Buchstaben a, b, c, d etc., bei Farben und anderen Dingen beliebig) eine Permutation.

Sind diese Elemente sämmtlich von einander unterschieden oder unterscheidbar, so lassen sich auch die daraus zusammengesetzten Umordnungen von einander unterscheiden, und man nennt solche Complexionen Permutationen ohne Wiederholung. Uebereinstimmende Elemente (wie $\alpha\alpha$, bbb, 222, 5555) haben zur Folge, dass mehrere aus ihnen nach der involutorischen Ableitungsregel aufgestellte Complexionen sich wiederholen und deshalb nur für eine gelten. Hiernach geben denn auch n verschiedene Elemente eine Anzahl von unterscheidbaren Permutationen, welche durch die Formel $1.2.3.4....n$ ausgedrückt ist;*) während nur $\frac{1.2.3.4.....n}{1.2.3...r \times 1.2..k \times \text{etc.}}$ verschiedene bleiben, wenn sich unter ihnen r gleiche Elemente einer Art, k gleiche einer andern Art u. s. w. befinden. **)

---

*) Z. B. können 3 Buchstaben 1.2.3 oder 6mal, 7 Buchstaben 1.2.3.4.5.6.7 d. i. 5040, alle 24 des Alphabets 1.2.3.4....... bis 24 oder 620448401733239439360000 Umstellungen geben. Zu einer Ausführung dieser letzteren würde, beiläufig bemerkt, das ganze sich zu diesem Vergnügen hergebende Menschengeschlecht bei allem Fleiss in 100 Millionen Jahren kaum fertig werden. — Zehnziffrige Zahlen, aus den Ziffern 0, 1, 2, 3 bis 9 zusammengesetzt, giebt es der obigen Formel gemäss (und nach Abzug desjenigen zehnten Theils aller Complexionen, welcher, wegen 0 an höchster Stelle, nur die Bedeutung 9ziffriger Zahlen hat) [3628800 — 362880 =] 3265920.

**) Z. B. geben die Ziffern 1,1,2,2,2,3,5,5,5,5 $\frac{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10}{1.2.1.2.3.1.2.3.4.}$ oder gehoben 5.7.4 9.10 d.i 12600 verschiedene Zahlen.

Das Ordnungsprincip für die Permutationen (sei es ein numerisches, alphabetisches oder allgemein lexicographisches) ist darin zu suchen, dass sämmtliche Permutationen nach den übereinstimmenden Anfangselementen gruppirt in der Ordnung auf einanderfolgen, wie die Urordnung der Elemente es vorschreibt, dass also alle Permutationen, welche mit dem ersten Element der Urordnung anfangen, die erste Stelle, die mit dem zweiten anfangen, die zweite Stelle einnehmen u. s. w. In dieser Weise unter einander gestellt erhält man die Complexionen der 1sten, 2ten, 3ten Ordnung u. s. w. Dieselbe Ordnungsfolge nimmt man wahr, wenn man nach Weglassung des ersten Elements, die um ein Element verringerten Complexionen mit der Urordnung ihrer Elemente vergleicht, wie aus den nachfolgenden Beispielsaufstellungen ersichtlich ist:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Erste Gruppe | (abc)<br>(acb) | erste Ordnung | bc erste )<br>cb zweite ) | Ordnung der Elemente bc |
| Zweite Gruppe | (bac)<br>(bca) | zweite Ordnung | ac erste )<br>ca zweite ) | Ordnung der Elemente ac |
| Dritte Gruppe | (cab)<br>(cba) | dritte Ordnung | ab erste )<br>ba zweite ) | Ordnung der Elemente ab. |

Aehnliches findet sich in:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| abcd<br>abdc<br>acbd<br>acdb<br>adbc<br>adcb | erste Ordnung. | bcd)<br>bdc) | erste Ordnung | cd erste )<br>dc zweite ) | Ordnung |
| | | cbd)<br>cdb) | zweite Ordnung | bd erste )<br>db zweite ) | Ordnung |
| | | dbc)<br>dcb) | dritte Ordnung | bc erste )<br>cb zweite ) | Ordnung. |
| bacd<br>badc<br>bcad<br>bcda<br>bdac<br>bdca | zweite Ordnung. | acd)<br>adc) | erste Ordnung | cd erste )<br>dc zweite ) | Ordnung |
| | | cad)<br>cda) | zweite Ordnung | ad erste )<br>da zweite ) | Ordnung |
| | | dac)<br>dca) | dritte Ordnung | ac erste )<br>ca zweite ) | Ordnung. |
| cabd<br>cadb<br>cbad<br>cbda<br>cdab<br>cdba | dritte Ordnung. | abd)<br>adb) | erste Ordnung | bd erste )<br>db zweite ) | Ordnung |
| | | bad)<br>bda) | zweite Ordnung | ad erste )<br>da zweite ) | Ordnung |
| | | dab)<br>dba) | dritte Ordnung | ab erste )<br>ba zweite ) | Ordnung. |
| dabc<br>dacb<br>dbac<br>dbca<br>dcab<br>dcba | vierte Ordnung. | abc)<br>acb) | erste Ordnung | bc erste )<br>cb zweite ) | Ordnung |
| | | bac)<br>bca) | zweite Ordnung | ac erste )<br>ca zweite ) | Ordnung |
| | | cab)<br>cba) | dritte Ordnung | ab erste )<br>ba zweite ) | Ordnung. |

Berücksichtigt man nun den Umstand, dass die Anzahl der Ordnungen immer der Anzahl der Elemente gleich ist und dass bei n verschiedenen Elementen 1.2.3.... (n—1) Complexionen auf jede Ordnung kommen, so ergiebt sich hieraus ein leichtes Verfahren, die Stellenzahl einer gegebenen Complexion (für lauter verschiedene Elemente) zu finden. Z. B. cdab gehört im Vergleich mit der Urcomplexion (abcd) zur dritten Ordnung; es

gehen ihr also voran zwei Ordnungen a b, d. i. . . . . . . . . . = 12 Complexionen,
dab gehört im Vergleich mit seiner Urcomplexion (abd) zur dritten Ordnung und ihr gehen voran zwei Ordnungen a 2, d. i. = 4 Complexionen,
ab gehört in Vergleich mit seiner Urcomplexion (ab) zur ersten Ordnung; ihr gehen also voran 0 Ordnungen a 1 Complexionen = 0 Complexionen.
Aehnlich giebt auch b keine vorangehende Complexion, also ist die Summa aller dem cdab vorangehenden Complexionen = 16, d. h. cdab **selbst** die 17te Complexion.

Anderes Beispiel: die wievielste unter den aufsteigend geordneten und aus den Ziffern 2, 3, 5, 6, 7, 9 zusammengesetzten sechsziffrigen Zahlen 673592 ist, ergiebt die vereinfachte Rechnung, dass vorangehen:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| der Zahl 673592, | mit 2, 3 und 5 | anfangend, | 3.1.2.3.4.5 | = 360 Zahlen, |
| der Zahl 73592, | mit 2, 3 und 5 | anfangend, | 3.1.2.3.4 | = 72 Zahlen, |
| der Zahl 3592, | mit 2 | anfangend, | 1.1.2.3 | = 6 Zahlen, |
| der Zahl 592, | mit 2 | anfangend, | 1.1.2 | = 2 Zahlen, |
| der Zahl 92, | mit 2 | anfangend, | 1.1 | = 1 Zahlen, |
| der Zahl 2, | keine . . . | . . . . . . | . . | = 0 Zahlen, |
| | | | also überhaupt | = 441 Zahlen, |

so dass 673592 die 442ste Zahl unter denjenigen 6 ziffrigen Zahlen ist, welche aus denselben Ziffern, wie **sie** zusammengesetzt und aufsteigend geordnet sind. — Vom Ende angefangen und rückwärts gezählt, würde diese Zahl die (720—441=) 279ste sein.

Zur Vervollständigung der eben gegebenen Anweisung, die Stellenzahl einer Permutation zu ermitteln, ist nun noch die Betrachtung solcher Permutationen nöthig, welche eine oder mehrere Partien gleicher Elemente haben. Z. B. diene P (a, a, b, b, c) =

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| aabbc | erste Ordnung.*) | abbc | erste Ordnung. | bbc | erste Ordnung. |
| aabcb | | abcb | | bcb | |
| aacbb | | acbb | | cbb | zweite Ordnung. |
| ababc | | babc | zweite Ordnung. | abc | erste Ordnung. |
| abacb | | bacb | | acb | |
| abbac | | bbac | | bac | zweite Ordnung. |
| abbca | | bbca | | bca | |
| abcab | | bcab | | cab | dritte Ordnung. |
| abcba | | bcba | | cba | |
| acabb | | cabb | dritte Ordnung. | abb | erste Ordnung. |
| acbab | | cbab | | bab | zweite Ordnung. |
| acbba | | cbba | | bba | |

und so weiter zerfallend.

*) Diese Ordnung wäre eigentlich eine Doppelordnung zu nennen, da sie die Ordnung der beiden gleichen Elemente a vereinigt. Dasselbe gilt von der zweiten Ordnung wegen der gleichen Elemente b. Auf diese Weise kann es Verschmelzungen beliebig mehrfacher Ordnungen zu einer geben. Dies darf aber von der Rechnung nicht ausser Acht gelassen werden.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| baabc | zweite Ordnung. | aabc | erste Ordnung. | abc | erste Ordnung. | und so weiter zerlegbar. |
| baacb | | aacb | | acb | | |
| babac | | abac | | bac | zweite Ordnung. | |
| babca | | abca | | bca | | |
| bacab | | acab | | cab | dritte Ordnung. | |
| bacba | | acba | | cba | | |
| bbaac | | baac | zweite Ordnung. | aac | erste Ordnung. | |
| bbaca | | baca | | aca | | |
| bbcaa | | bcaa | | caa | zweite Ordnung. | |
| bcaab | | caab | dritte Ordnung. | aab | erste Ordnung. | |
| bcaba | | caba | | aba | | |
| bcbaa | | cbaa | | baa | zweite Ordnung. | |
| caabb | dritte Ordnung. | aabb | erste Ordnung. | abb | erste Ordnung. | |
| cabab | | abab | | bab | zweite Ordnung. | |
| cabba | | abba | | bba | | |
| cbaab | | baab | zweite Ordnung. | aab | erste Ordnung. | |
| cbaba | | baba | | aba | | |
| cbbaa | | bbaa | | baa | zweite Ordnung. | |

Es zerfällt also auch hier jede Ordnung einer vorangehenden Permutationsklasse in systematische Ordnungen der folgenden Klasse, wenn man das Vorelement weglässt. Ist nun die Frage nach der Stellenzahl etwa der Permutation bcaab, so gilt folgendes Raisonnement:

1) die Elemente a, a, b, b, c geben überhaupt $\frac{1.2.3.4.5}{1.2.1.2}$ . . . d. i. 30 Permutationen,

davon kommen auf jedes Ordnungselement $\frac{30}{5} = 6$.

Dem Kopfelemente b in bcaab gehen aber in der Urcomplexion (aabbc) zwei Elemente a, folglich der Complexion bcaab 2 Ordnungen (der Elemente a und a) à 6 Complexionen, d. i. . . = 12 Compl. voran,

2) Die nach Entfernung des Kopfelements b übrig bleibende Complexion caab gehört zu den Permutationen der Urcomplexion (a, a, b, c), welche $\frac{1.2.3.4}{1.2.} = 12$ Permutirungen zulässt und $\frac{12}{4} = 3$ in jeder Ordnung hat. Es gehen also dem caab, wegen der 3 vorstehenden Elemente (a, a und b) der Urcomplexion, voran $3 \times 3$ . . . . . . . . . . . . = 9 Complexionen,

3) Nach Entfernung des Kopfelements c bleibt die Complexion aab übrig, welche zugleich die Urcomplexion ist, der nichts vorangeht. Daher . . . . . . . . . . . . . . . . . 0

Im Ganzen gehen hiernach voran (12 + 9 =) . . . . . . 21 Complexionen, also ist bcaab die 22ste. *)

*) Anmerk. Dieses Verfahren wird nicht in allen Fällen bis auf ein Element zurückzugehen haben; sondern schon dann abschliessen können, wenn eine Restcomplexion mit ihrer Urcomplexion zusammenfällt, wie im obigen Beispiel aab.

Anderes Beispiel in tabellarischer Uebersicht: 7335357 die wievielste Permutation von der Urcomplexion 3335577 ab?

| In Betracht kommende Complexion. | Urcomplexion dazu. | Zahl der Permutationen überhaupt. | Zahl der Permutationen jeder einfachen Ordnung. | Zahl der vorangehenden Elemente und Ordnungen. | Zahl der vorangehenden Permutationen. |
|---|---|---|---|---|---|
| 7335357 | 3335577 | $\frac{1.2.3.4.5.6.7}{1.2.3.1.2.1.2} = 210$ | $\frac{210}{7} = 30$ | 5 | $5 \times 30 = 150$ |
| 335357 | 333557 | $\frac{1.2.3.4.5.6}{1.2.3.1.2} = 60$ | $\frac{60}{6} = 10$ | 0 | $0 \times 10 = 0$ |
| 35357 | 33557 | $\frac{1.2.3.4.5}{1.2.1.2} = 30$ | $\frac{30}{5} = 6$ | 0 | $0 \times 6 = 0$ |
| 5357 | 3557 | $\frac{1.2.3.4}{1.2} = 12$ | $\frac{12}{4} = 3$ | 1 | $1 \times 3 = 3$ |
| 357 | 357 | $1.2.3 = 6$ | $\frac{6}{3} = 2$ | 0 | $0 \times 2 = 0$ |
| 57 | 57 | $1.2 = 2$ | $\frac{2}{2} = 1$ | 0 | $0 \times 1 = 0$ |
| 7 | 7 | $= 1$ | $\frac{1}{1} = 1$ | 0 | $0 \times 1 = 0$ |

also voran gehen in Summa = 153 Permutationen.

Daher ist 7335357 unter den Permutationen ihrer Klasse die 154ste.

Die Beantwortung der zweiten Frage, wie nämlich die Permutation zu einer bestimmten Stellenzahl aus den Elementen der gegebenen Urcomplexion zusammenzusetzen ist, verlangt, wie alle inversen Operationen, das entgegengesetzte Verfahren von dem directen und eben gezeigten. Am einleuchtendsten dürfte es aus Beispielen zu erlernen sein. Soll z. B. die 597ste Permutation der Elemente c, f, k, r, x, z (welche überhaupt $1.2.3.4.5.6 = 720$ Permutationen zulassen) gefunden werden, so weiss man, dass $\frac{720}{6}$ oder 120 Permutationen auf jede Ordnung kommen. Die Division $120 \left| \begin{array}{l} 597 \\ 480 \end{array} \right| 4$, Rest 117, zeigt durch ihren Quotienten 4 an, dass dem ersten Element der gesuchten Complexion 4 Ordnungen vorangehen, d. h. dieses Element ist x, da diesem die 4 Ordnungen mit den Kopfelementen c, f, k, r vorstehen. Es bleiben also übrig die Elemente c f k r z, welche überhaupt $1.2.3.4.5 = 120$ Permutationen, und auf jede Ordnung $\frac{120}{5} = 24$ Permutationen geben.

---

Anmerkung. Zur Einübung und weiteren Erprobung des hier gelehrten Verfahrens sind die von Ed. Heis in seiner Aufgabensammlung gestellten recht interessanten Fragen in Beziehung auf Permutationen, in §. 90, zu empfehlen.

Die Division hiermit in den gebliebenen Rest $\begin{array}{r|r|l} 24 & 117 & 4 \\ & 96 & \\ \hline & 21 & \end{array}$ zeigt durch ihren Quotienten 4 an, dass dem nun zu ermittelnden Element wieder 4 Ordnungen, also mit den Kopfelementen c, f, k, r vorangehen. Folglich hat man dafür z. Die nun übrigen Elemente c f k r geben überhaupt $1.2.3.4 = 24$ Permutationen und $\frac{24}{4} = 6$ auf jede Ordnung. Hiermit in den Rest dividirt $\begin{array}{r|r|l} 6 & 21 & 3 \\ & 18 & \\ \hline & 3 & \end{array}$ deutet auf drei vorangehende Ordnungen, nämlich mit den Kopfelementen c, f, k, hin und giebt r als gesuchtes Element. Die verbleibenden Elemente c, f, k, lassen $1.2.3 = 6$ Permutationen zu und geben $\frac{6}{3} = 2$ für jede Ordnung. Die Division $\begin{array}{r|r|l} 2 & 3 & 1 \\ & 2 & \\ \hline & 1 & \end{array}$ deutet also durch den Quotienten 1 auf f als zu wählendes Element hin. Es bleiben daher übrig die Elemente c, k, welche $1.2 = 2$ Permutationen und auf jede Ordnung $\frac{2}{2} = 1$ Complexionen zulassen. Da man nun aber bei keiner der vorkommenden Divisionen den Rest unter 1 sinken lassen darf, sondern den Rest 1 als Stellenzahl der mit ihrer Urcomplexion zuletzt zusammenfallenden Permutation zu reserviren hat, so erklärt sich hieraus, dass bei der jetzt folgenden Division $\begin{array}{r|r|l} 1 & 1 & 0 \\ & 0 & \\ \hline & 1 & \end{array}$, als Quotient nicht 1, sondern 0 zu nehmen ist. Dieser richtige Quotient führt auf das zu wählende Element c hin und lässt, die weitere Division überflüssig machend, als schliesslich zu nehmendes Element k übrig. Daher heisst die 597ste Permutation x z r f k. —

A n d e r e s  B e i s p i e l: Die 77777ste Permutation zur Ziffercomplexion 123456789 zu finden.

$\begin{array}{r|r|l} 1.2.3.4.5.6.7.8 = 40320 & 77777 & 1 \\ & 40320 & \end{array}$ giebt aus 123456789 die 2,

$\begin{array}{r|r|l} 1.2.3.4.5.6.7 = 5040 & 37457 & 7 \\ & 35280 & \end{array}$ giebt aus 13456789 die 9,

$\begin{array}{r|r|l} 1.2.3.4.5.6 = 720 & 2177 & 3 \\ & 2160 & \end{array}$ giebt aus 1345678 die 5,

$\begin{array}{r|r|l} 1.2.3.4.5 = 120 & 17 & 0 \\ & 0 & \end{array}$ giebt aus 134678 die 1,

$\begin{array}{r|r|l} 1.2.3.4 = 24 & 17 & 0 \\ & 0 & \end{array}$ giebt aus 34678 die 3,

$\begin{array}{r|r|l} 1.2.3 = 6 & 17 & 2 \\ & 12 & \end{array}$ giebt aus 4678 die 7,

$\begin{array}{r|r|l} 1.2 = 2 & 5 & 2 \\ & 4 & \end{array}$ giebt aus 468 die 8,

$\begin{array}{r|r|l} 1 & 1 & 0 \\ & 0 & \\ \hline & 1 & \end{array}$ giebt aus 46 die 4,

giebt aus 6 die 6,

daher die gesuchte Zahl 295137846.

Das Verfahren bei Permutationen mit Wiederholungen (gleicher Elemente) bleibt im Wesentlichen dasselbe. Nur hat man bei den Divisionen noch darauf zu sehen, dass der Quotient, wenn er auf eines der gleichen Elemente trifft, kein früheres derselben überspringen darf; widrigenfalls er als zu gross so weit verkleinert werden muss, dass er das früheste (oder niedrigste) dieser gleichen Elemente anzeigt. Die Regel wegen des Restes (über 0) gilt ausserdem auch hier. Wäre z. B. die 79ste Permutation der Elemente aabbcc zu ermitteln, so hätte man in folgender Weise zu rechnen, wobei zum Divisor die Anzahl der Permutationen einer Ordnung der jedesmal noch vorhandenen Elemente genommen wird.

$\left[\frac{1.2.3.4.5.6}{1.2.1.2.1.2\times6}=\right]$ 15 | 79 | 4 (nicht 5) trifft in aabbcc das erste c,
| 60 |
$\left[\frac{1.2.3.4.5}{1.2.1.2\times5}=\right]$ 6 | 19 | 2 (nicht 3) trifft in aabbc das erste b,
| 12 |
$\left[\frac{1.2.3.4}{1.2\times4}=\right]$ 3 | 7 | 2 trifft in aabc das . . . . . b,
| 6 |
$\left[\frac{1.2.3}{1.2\times3}=\right]$ 1 | 1 | 0 trifft in aac das erste . . . a,
| 0 |
$\left[\frac{1.2}{2}=\right]$ 1 | 1 | 0 trifft in ac das . . . . . . a,
| 0 |
und für 1 bleibt . . . . . . . c,

folglich ist die 79ste Permutation cbbaac.

Anderes Beispiel: Aus den Elementen aaabbbbcc ihre 343ste Permutation zusammenzusetzen. Schema:

$\left[\frac{1.2.3.4.5.6.7.8.9}{1.2.3\times1.2.3.4\times1.2\times9}=\right]$ 140 | 343 | 0 (nicht 2) giebt . . . a,
| 0 | (bleibt aabbbbcc)
$\left[\frac{1.2.3.4.5.6.7.8}{1.2\times1.2.3.4\times1.2\times8}=\right]$ $\frac{105}{2}$ | 343 | 6 giebt . . . . . c,
| 315 | (bleibt aabbbbc)
$\left[\frac{1.2.3.4.5.6.7}{1.2\times1.2.3.4\times7}=\right]$ 15 | 28 | 0 (nicht 1) giebt . . . a,
| 0 | (bleibt abbbbc)
$\left[\frac{1.2.3.4.5.6}{1.2.3.4\times6}=\right]$ 5 | 28 | 5 giebt . . . . . . . c,
| 25 | (bleibt abbbb)
$\left(\frac{1.2.3.4.5}{1.2.3.4\times5}=\right)$ 1 | 3 | 1 (nicht 2) giebt . . . b,
| 1 | (bleibt abbb)
$\left(\frac{1.2.3.4}{1.2.3\times4}=\right)$ 1 | 2 | 1 . . . . . . . b,
| 1 | (bleibt abb) . . abb,
$\left(\frac{1.2.3}{1.2\times3}=\right)$ 1 | 1 | 0 . . . . . . . . a,
| 0 |
1 . . . . . . . . . bb,

die 343ste Permutation also acacbbabb.

Nach diesen Erörterungen wird man es leicht finden, bei zwei gegebenen Permutationen derselben Elemente ihren Abstand von einander entweder dadurch zu bestimmen, dass man die Zahl der zwischen liegenden Permutationen angiebt, oder dadurch, dass man den Stellenindex der spätern in Beziehung auf die frühere, als erste, in Zahlen ausdrückt. Die für den ersten Fall um 1 verminderte und für den zweiten Fall um 1 vermehrte Differenz zwischen den Stellenzeigern beider Permutationen (von der Urcomplexion ab gezählt) giebt natürlich das verlangte Resultat. — Bei Complexionen, welche die

Ordnung der Elemente in der Urcomplexion leicht wieder erkennen lassen (wie bei Buchstaben und Zahlen), ist diese ohne Weiteres herzustellen; dagegen verliert die Frage nach der Urcomplexion ihre Einfachheit dann gänzlich, wenn aus zwei gegebenen Permutationen, deren Elemente keine Urordnung zur Schau tragen, und aus ihrem Abstande von einander auf jene zurückgeschlossen werden soll. Gesetzt es hätten die nachbenannten Farben (oder die Wörter als Namen betrachtet) in der einen Permutation die Stellung: roth, blau, gelb, schwarz, grün, in der andern: gelb, roth, grün, schwarz, blau und zwischen ihnen lägen n andere Zusammenstellungen in geordneter Folge, so wäre die Urcomplexion hieraus zwar nicht ersichtlich, aber doch als bestimmbar zu denken, sobald dem n die allein zulässigen Zahlenwerthe beigelegt werden. Einen Angriff auf diese unnehmbare Festung hat mein Geschütz nicht gemacht.

Insofern keine Nothwendigkeit für die natürliche oder gegebene Urordnung der Elemente vorliegt, darf jede Complexion als Urordnung gelten; nur hat man alsdann nicht zu erwarten, dass die regelrechte Entwickelung der Permutationen aus einander die frühere Reihenfolge ungestört lassen werde. Hiernach steht zu erwarten, dass P (1, 2, 3...n) 1.2.3...n verschiedene nach demselben Princip geordnete Reihenfolgen seiner Permutationen darbieten müsse.

Geht man z. B. von der natürlichen Elementarordnung a, b, c, d, e, aus, so ist von den 120 Permutationen derselben aebcd die 19te, cbead die 59ste, folglich diese von jener abgezählt die 41ste. Nimmt man dagegen $\overset{1}{a}, \overset{2}{e}, \overset{3}{b}, \overset{4}{c}, \overset{5}{d}$ als die Urordnung an, so wird zu dieser Complexion (wenn man die übergestellten Ordnungsziffern als stellvertretend anwendet und hinterher die entsprechenden Buchstaben resubstituirt) ecdab die 41ste Permutation der neuen Reihenfolge sein; dagegen cbead als die 87ste auftreten.

Um durch den Augenschein eine Ueberzeugung zu gewähren, muss ich den ungläubigen Leser bitten, sich die in Betracht kommenden zweimal 120 Complexionen hinzuschreiben, oder wenigstens eine von beiden aus abgedruckten Permutationsschemen (z. B. Hindenburg Tab. I. pag. LVII.) zu entnehmen. Aus der obigen Bemerkung geht als combinatorische Aufgabe die Frage hervor, ob die variirten Permutationszeichen sowohl unter einander als auch in ihren Gliedern hervortretende Beziehungen haben. Diese und ähnliche Fragen, wie die bisher bezüglich der Permutationen beantworteten, könnten auch in Rücksicht auf die Combinationen und Variationen um so mehr in der grössten Mannigfaltigkeit gestellt werden, als diese Operationen (des Combinirens und Variirens) unbegrenzter Erweiterung und Verflechtung fähig sind. Könnte indess und wollte Jemand hierin auch nur das Mögliche und Ausführbare leisten, so würde er darauf mehr Zeit und Raum zu verwenden sich genöthigt sehen, als die wenigen Blätter und der precäre Erfolg eines Programms es billig erscheinen lassen. Meinestheils glaube ich, dass es genügt, mit Hinweis auf die für Permutationen gezeigten Verfahrungsarten, für anleitungsbedürftige Leser die Bemerkung hinzuzufügen, dass in allen Fällen festzustellen ist:

1) nach welchem Princip die Entwickelung*) oder Herstellung der Combinationen, Excerptionen u. s. w. zu machen und zu ordnen sei;
2) in welche Gruppen und Partien derselben sich die ganze Reihenfolge ordnungsmässig sondern lasse;
3) wie gross die Zahl der Glieder jeder Gruppe und jeder Partie (aus der Anzahl der gegebenen Elemente, oder der Gliederzahl der Elementenreihen hergeleitet) sei und
4) in welcher Beziehung die Elemente ihrer Stellung nach zu der Stellung derjenigen Formung stehen, worin sie vorkommen.

---

Anmerk. Eine gute Unterstützung bei der hier empfohlenen Arbeit dürfte man in dem vortrefflichen Werk von Dr. Rich. Balzer: Elemente der Mathematik (1860) finden.

## VII.

Zur Vorbereitung der schliesslich von mir noch beabsichtigten multiplicativen Combinationssummirungen diene folgende Betrachtung. Ist der aus n binomischen Faktoren zusammengesetzte Ausdruck $(x+\alpha)(x+\beta)(x+\gamma)\ldots(x+\mu)(x+\nu)$ eine Funktion von x und entwickelt gleich $x^n+Ax^{n-1}+Bx^{n-2}+\ldots+Mx+N$, so dass hierin $A=\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\mu+\nu$, $B=\alpha\beta+\alpha\gamma+\ldots+\alpha\nu+\beta\gamma+\ldots+\beta\nu+\ldots+\gamma\nu+$ etc., $C=\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\ldots+\alpha\beta\nu+\beta\gamma\delta+\ldots+\beta\gamma\nu+$ etc. wäre, d. h. überhaupt, dass A, B, C etc. nach der Reihe die Summe der Unionen, multiplicativen Binionen, Ternionen etc. aus $\alpha, \beta, \gamma \ldots \mu$ und $\nu$ repräsentiren, so hat man, falls dieser Ausdruck in X abgekürzt wird,

1. $x^n+Ax^{n-1}+Bx^{n-2}+Cx^{n-3}+\ldots+Mx+N=(x+\alpha)(x+\beta)(x+\gamma)\ldots(x+\mu)(x+\nu)=X.$
Da es wegen der Veränderlichkeit des x erlaubt sein muss, dasselbe in x+h zu verwandeln, so hat man

2. $(x+h)^n+A(x+h)^{n-1}+B(x+h)^{n-2}+\ldots+M(x+h)+N=$
$(x+h+\alpha)(x+h+\beta)(x+h+\gamma)+\ldots+(x+h+\mu)(x+h+\nu)$
Die Entwickelung beider Seiten nach Potenzen von h, nämlich:

3. $[x^n+Ax^{n-1}+Bx^{n-2}+\ldots+Mx+N]+[nx^{n-1}+(n-1)Ax^{n-2}+(n-2)Bx^{n-3}+\ldots+M]h$
$+[\ldots]h^2+[\ldots]h^3+\text{etc.}=X+\left[\frac{X}{x+a}+\frac{X}{x+\beta}+\frac{X}{x+\gamma}+\ldots+\frac{X}{x+\nu}\right]h$
$+[\ldots]h^2+[\ldots]h^3+\text{etc.}$
lässt den Schluss zu, dass die Coefficienten gleicher Potenzen von h gleich sind. Wendet man denselben auf die beiden Glieder mit h an, so ist

4. $nx^{n-1}+(n-1)Ax^{n-2}+(n-2)Bx^{n-3}+\ldots+M=\frac{X}{x+\alpha}+\frac{X}{x+\beta}+\frac{X}{x+\gamma}+\ldots+\frac{X}{x+\nu}$
also auch

5. $\frac{nx^{n-1}+(n-1)Ax^{n-2}+(n-2)Bx^{n-3}+\ldots+M}{x^n+Ax^{n-1}+Bx^{n-2}+\ldots+Mx+N}=\frac{1}{x+\alpha}+\frac{1}{x+\beta}+\frac{1}{x+\gamma}+\ldots+\frac{1}{x+\nu}$
Werden nun an Stelle der Brüche rechter Hand die aus den Divisionen entspringenden Quotienten gesetzt, nämlich

$$\frac{1}{x+\alpha}=\frac{1}{x}-\frac{\alpha}{x^2}+\frac{\alpha^2}{x^3}-\frac{\alpha^3}{x^4}+\frac{\alpha^4}{x^5}-\text{etc.}$$

$$\frac{1}{x+\beta}=\frac{1}{x}-\frac{\beta}{x^2}+\frac{\beta^2}{x^3}-\frac{\beta^3}{x^4}+\frac{\beta^4}{x^5}-\text{etc.}$$

$$\frac{x}{x+\gamma}=\frac{1}{x}-\frac{\gamma}{x^2}+\frac{\gamma^2}{x^3}-\frac{\gamma^3}{x^4}+\frac{\gamma^4}{x^5}-\text{etc.}$$

$$\vdots$$

$$\frac{1}{x+\nu}=\frac{1}{x}-\frac{\nu}{x^2}+\frac{\nu^2}{x^3}-\frac{\nu^3}{x^4}+\frac{\nu^4}{x^5}-\text{etc., so ist summirt}$$

$$\frac{1}{x+\alpha}+\frac{1}{x+\beta}+\frac{1}{x+\gamma}+\ldots+\frac{1}{x+\nu}=\frac{n}{x}-(\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\nu)\frac{1}{x^2}+(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\ldots+\nu^2)\frac{1}{x^3}$$
$$-(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3+\ldots+\nu^3)\frac{1}{x^4}+(\alpha^4+\beta^4+\gamma^4+\ldots+\nu^4)\frac{1}{x^5}-\text{etc.}$$
$$=\frac{n}{x}-S_1\frac{1}{x^2}+S_2\frac{1}{x^3}-S_3\frac{1}{x^4}+S_4\frac{1}{x^5}-\text{etc.},$$

wenn man $\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\nu=S_1$ $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\ldots+\nu^2=S_2$, $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3+\ldots+\nu^3=S_3$ u. s. w. setzt.

Multiplicirt man hier beide Seiten mit X, so ist

6. $n x^{n-1} + (n-1) A x^{n-2} + (n-2) B x^{n-3} + (n-3) C x^{n-4} + \ldots + M = \left(\frac{n}{x} - \frac{S_1}{x^2} + \frac{S_2}{x^3} - \frac{S_3}{x^4} + \text{etc.}\right) X$

$= \left(\frac{n}{x} - \frac{S_1}{x^2} + \frac{S_2}{x^3} - \frac{S_3}{x^4} + \text{etc.}\right) (x^n + A x^{n-1} + B x^{n-2} + C x^{n-3} + \ldots + M x + N)$

$= n x^{n-1} + (n A - S_1) x^{n-2} + (n B - A S_1 + S_2) x^{n-3} + (n C - B S_1 + A S_2 - S_3) x^{n-4}$ etc.

Die Gleichsetzung der correspondirenden Coefficienten giebt also geordnet und annullirt:

7. $S_1 - A = 0$
$S_2 - A S_1 + 2 B = 0$
$S_3 - A S_1 + B S_2 - 3 C = 0$
$S_4 - A S_3 + B S_2 - C S_1 + 4 D = 0$
u. s. w.

Diese Gleichungen (in 7) drücken nach den angenommenen Bestimmungen Relationen zwischen den Summen der Multiplicativ-Combinationen der Grössen $\alpha, \beta, \gamma \ldots \nu$ und den Summen ihrer gleich hohen Potenzen aus. Es lassen sich mittelst derselben also die einen aus den andern herleiten. — In dem Falle nun, dass $\alpha, \beta, \gamma \ldots \mu, \nu$ die ganzen Zahlen 1, 2, 3 ... bis n bedeuten, welchen Werth sie als allgemeine Grössen unzweifelhaft annehmen dürfen, mögen die Summen ihrer gleich hohen Potenzen durch $\int(n^1)$; $\int(n^2)$; $\int(n^3)$; $\int(n^4)$ u. s. w. und die Summen ihrer Multiplicativ-Combinationen zur 1sten, 2ten, 3ten Klasse etc. durch $\underset{1}{C}(n)$; $\underset{2}{C}(n)$; $\underset{3}{C}(n)$; $\underset{4}{C}(n)$ u. s. w. bezeichnet werden, so dass letztere die Stelle von A, B, C, D etc. vertreten; dann gilt (nach 7):

8. $\int(n^1) - \underset{1}{C}(n) = 0$

$\int(n^2) - \underset{1}{C}(n) . \int(n^1) + 2 \underset{2}{C}(n) = 0$

$\int(n^3) - \underset{1}{C}(n) . \int(n^2) + \underset{2}{C}(n) . \int(n^1) - 3 \underset{3}{C}(n) = c$

$\int(n^4) - \underset{1}{C}(n) . \int(n^3) + \underset{2}{C}(n) . \int(n^2) - \underset{3}{C}(n) \int(n^1) + 4 \underset{4}{C}(n) = 0$ u. s. w.

Um hieraus für jedes ganze n giltige C-Formeln zu entwickeln, ist es nöthig, die S-Formeln zu kennen. Da diese den arithmetischen Progressionen oder Reihen höherer Ordnung angehören, so kann man sie Ausdrucksformen unterwerfen, welche sich je nach den Daten oder Bedingungen anders und anders gestalten. [1]) Für den gegenwärtigen Zweck sind die gewöhnlichen Formeln [2]) zum Grunde gelegt und hiernach von mir gefunden:

8. $\int(n^1) = 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots\ldots + n = \frac{n(n+1)}{1.2}$

$\int(n^2) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots\ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{1.2.3} = \left(\frac{2n+1}{3}\right) . \int(n^1)$

$\int(n^3) = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \ldots\ldots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{1.2}\right]^2 = \left\{\int(n^1)\right\}^2 = \frac{n(n+1)}{1.2} . \int(n^2)$

$\int(n^4) = 1^4 + 2^4 + 3^4 + 4^4 + \ldots\ldots + n^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{1.2.3.5}$

oder auch $\frac{2n(2n+1)(2n+2)}{1.2.3.4}.\left\{\frac{3n^2+3n-1}{5}\right\}$ oder

$$=\left(\frac{3n^2+3n-1}{5}\right).\int(n^2)$$

$$\int(n^5)=1^5+2^5+3^5+4^5+\ldots+n^5=\frac{n.n(n+1)(n+1)(2n^2+2n-1)}{1.1.2.2.3}$$

$$=\left[\frac{n(n+1)}{1.2}\right]^2.\left[\frac{2n^2+2n-1}{3}\right]=\left(\frac{2n^2+2n-1}{3}\right)\int(n^3)$$

$$\int(n^6)=1^6+2^6+3^6+4^6+\ldots+n^6=\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^4+6n^3-3n+1)}{1.2.3.7}$$

$$=\left(\frac{3n^4+6n^3-3n+1}{7}\right).\int(n^2)$$

$$\int(n^7)=1^7+2^7+3^7+4^7+\ldots+n^7=\left[\frac{n(n+1)}{1.2}\right]^2.\left\{\frac{3n^4+6n^3-n^2-4n+2}{6}\right\}$$

$$=\left(\frac{3n^4+6n^3-n^2-4n+2}{6}\right)\int(n^3)$$

In ausreichenden Proben haben sich diese Formeln als richtig bewährt. Um bei weiterer Berechnung ähnlicher Formeln $\left(\text{allgemein }\int(n^r)\right)$ mit einiger Bequemlichkeit vorgehen zu können, wäre es rathsam, die leicht verständliche Gleichung $\int(n^r)-\int(n-1)^r=n^r$ zum Grunde zu legen, demnächst

$$\int(n^r)=A_1 n^{r+1}+A_2 n^r+A_3 n^{r-1}+A_4 n^{r-2}+\ldots+A_{r+1}.n;\text{ folglich}$$

$$\int(n-1)^r=A_1(n-1)^{r+1}+A_2(n-1)^r+A_3(n-1)^{r-1}+A_4(n-1)^{r-2}+\ldots+A_{r+1}.(n-1)$$

zu setzen, die Potenzirungen und Gliedersubtraktionen auszuführen, nach Potenzen des n zu ordnen und schliesslich die Coefficientenvergleichung vorzunehmen. Die dadurch gewonnenen Gleichungen geordnet und auf 0 gebracht sind folgende:

$$A_1-\frac{1}{r+1}=0$$

$$A_2-\left(\frac{r+1}{2}\right)A_1=0$$

---

1) Z. B. aus dem ersten Gliede einer Reihe des pten Ranges, ${}^pz_1$ und dem ersten Gliede jeder Differenzenreihe aus ihr, ${}^1\Delta_1, {}^2\Delta_1, {}^3\Delta_1$, etc. ist die Summe von n Gliedern der Reihe, ${}^pSn=n{}^pz_1+\frac{n(n-1)}{1.2}{}^1\Delta_1+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}{}^2\Delta_1+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}{}^3\Delta_1+$ etc., soweit fortgesetzt, dass das Glied mit ${}^p\Delta_1$ den Schluss bildet, da alle übrigen Glieder desshalb wegfallen, weil ${}^{p+1}\Delta_1={}^{p+2}\Delta_1={}^{p+3}\Delta_1=\text{etc.}=0$ sind.

2) Gewöhnlich setzt man, wo einzelne, besonders die auf einander folgenden ersten Glieder einer Reihe in der nöthigen Anzahl bekannt, oder überhaupt in Rechnung zu stellen sind, als normale Formungen fest:

$${}^1S_n=An^2+Bn;\ {}^2Sn=An^3+Bn^2+Cn;\ {}^3Sn=An^4+Bn^3+Cn^2+Dn$$

und ähnlich weiter, indem man hier unter A, B, C, D constante Coefficienten und unter n die Zahl der von S umfassten Glieder versteht.

$$A_3 - \frac{r}{2} A_2 + \frac{r(r+1)}{2.3} A_1 = 0$$

$$A_4 - \frac{(r-1)}{2} A_3 + \frac{(r-1)r}{2.3} A_2 - \frac{(r-1)r(r+1)}{2.3.4} A_1 = 0$$

$$A_5 - \frac{(r-2)}{2} A_4 + \frac{(r-2)(r-1)}{2.3} A_3 - \frac{(r-2)(r-1)r}{2.3.4} A_2 + \frac{(r-2)(r-1)r(r+1)}{2.3.4.5} A_1 = 0$$

$$\vdots$$

$$A_k - \frac{(r-k+3)}{2} A_{k-1} + \frac{(r-k+3)(r-k+4)}{2.3} A_{k-2} - \frac{(r-k+3)(r-k+4)(r-k+5)}{2.3.4} A_{k-3}$$

$$+ \text{ etc. bis } + \frac{(r-k+3)(r-k+4)\ldots.(r+1)}{2.3.4\ldots.k} A_1 = 0$$

Durch successive Bestimmung folgen hieraus:

$$A_1 = \frac{1}{r+1}$$

$$A_2 = \tfrac{1}{2}$$

$$A_3 = \frac{r}{12} = \frac{r}{2} . B_1$$

$$A_4 = 0$$

$$A_5 = \frac{-r(r-1)(r-2)}{2.3.4.5.6} = \frac{-r(r-1)(r-2)}{2.3.4} . B_2$$

$$A_6 = 0$$

$$A_7 = + \frac{r(r-1)(r-2)(r-3)(r-4)}{2.3.4.5.6.6.7} = + \frac{r(r-1)(r-2)(r-3)(r-4)}{2.3.4.5.6} . B_3$$

$$A_8 = 0$$

$$A_9 = - \frac{r(r-1)(r-2)\ldots.(r-6)}{2.3.4.5.6.7.8.5.6} = - \frac{r(r-1)(r-2)\ldots.(r-6)}{2.3\ldots8} . B_4$$

$$A_{10} = 0$$

$$A_{11} = + \frac{r(r-1)(r-2)\ldots.(r-8)}{2.3.4\ldots.9.11.12} = \frac{+r(r-1)(r-2)\ldots.(r-8)}{2.3.4\ldots.9.10} . B_5$$

wo die Buchstaben $B_1$, $B_2$, $B_3$ etc. die Bernoullischen Zahlen nach der Reihe sind.[1]) Es stellt sich hierbei das Gesetz heraus, dass mit Ausnahme von $A_2$, alle gerad-codicillirten A gleich 0 sind und dass die ungerad-codicillirten, von $A_3$ ab, in der Formel:

$$A_k = (-1)^{\frac{k+1}{2}} . \frac{r(r-1)(r-2)\ldots.(r-k+3)}{2.3.4\ldots.(k-1)} . B_{\frac{k-1}{2}}$$

enthalten sind, insofern eben für k nur ungerade Zahlen genommen werden. Man hat also ganz allgemein

$$9. \int(n^r) = \frac{1}{r+1} . n^{r+1} + \tfrac{1}{2} n^r + \frac{r}{2} B_1 n^{r-1} - \frac{r(r-1)(r-2)}{2.3.4} . B_2 n^{r-3}$$

$$+ \frac{r(r-1)(r-2)(r-3)(r-4)}{2.3.4.5.6} . B_3 n^{r-5}$$

$$- \frac{r(r-1)(r-2)(r-3)(r-4)(r-5)(r-6)}{2.3.4.5.6.7.8} . B_4 n^{r-7}$$

$$+ \frac{r(r-1)(r-2)(r-3)(r-4)(r-5)(r-6)(r-7)(r-8)}{2.3.4.5.6.7.8.9.10} . B_5 n^{r-9}$$

$$- + - + \text{ etc. bis}$$

---

[1]) Anmerk. Wer über diese Zahlen eine weitere Belehrung wünscht, findet sie in verschiedenen, dem Klügelschen mathematischen Wörterbuch und seinen neueren Supplementen einverleibten Abhandlungen, welche diesen Artikel öfter berühren, und gehörigen Orts gründlich besprechen.

$$\left\{(-1)^{\frac{r+2}{2}} \cdot \frac{r(r-1)(r-2)\ldots 4.3.2}{2.3.4\ldots\ldots r} \cdot B_{\frac{r}{2}}\, n = \right\}(-1)^{\frac{r+2}{2}} \cdot B_{\frac{r}{2}}\, n,$$

falls r gerade, und bis

$$\left\{(-1)^{\frac{r+1}{2}} \frac{r(r-1)(r-2)\ldots 4.3}{2.3.4\ldots(r-1)} \cdot B_{\frac{r-1}{2}} \cdot n^2 = \right\}(-1)^{\frac{r+1}{2}} \cdot \frac{r}{2} B_{\frac{r-1}{2}} \cdot n^2$$

wenn r ungerade ist.

Bezeichnet man die Coefficienten der rten Binomialpotenz, vom 2ten Gliede an gezählt, durch $C_1^r$, $C_2^r$, $C_3^r$, $C_4^r$ u. s. w., so kann diese Formel auch in dieser Weise abgekürzt geschrieben werden:

10. $$\int(n^r) = \frac{1}{r+1} \cdot n^{r+1} + \tfrac{1}{2} n^r + \tfrac{1}{2} C_1^r B_1 n^{r-1} - \tfrac{1}{4} C_3^r B_2 n^{r-3} + \tfrac{1}{6} C_5^r B_3 n^{r-5}$$

$$- \tfrac{1}{8} C_7^r B_4 n^{r-7} + \tfrac{1}{10} C_9^r B_5 n^{r-9} \text{ bis } (-1)^{\frac{r+2}{2}} \cdot B_{\frac{r}{2}} \cdot n \text{ für ein gerades r, oder bis}$$

$$(-1)^{\frac{r+1}{2}} \cdot \frac{r}{2} B_{\frac{r-1}{2}} \cdot n^2 \text{ für ein ungerades r.}$$

Mit diesen Hilfsmitteln wird es nun möglich sein, auf ganz elementarem Wege an die Lösung der Aufgabe zu gehen:

Die Summen der Multiplicativ-Combinationen aller natürlichen ganzen Zahlen, zunächst von 1 ab bis zu einem unbestimmten n hin, in Formeln auszudrücken, welche lediglich von n und dem Combinationsindex abhängen.

Die hierzu dienlichen Gleichungen findet man bereits in 8 aufgestellt und kann aus ihnen ohne weitere Schwierigkeit, wenn auch im vorschreitenden Verfolg immer mühsamer, die von $\int(n^1)$, $\int(n^2)$, $\int(n^3)$ etc. abhängig gemachten Werthe des $\int C_1(n)$, $\int C_2(n)$, $\int C_3(n)$ u. s. w. berechnen. Diese Herleitungen möglichst vermeidend theile ich im Nachfolgenden die gefundenen Formeln in ihrer bequemsten Gestalt für die Anwendung mit. Es ist

---

Anmerk. Da die Formel in 9. oder 10. für jeden Werth des n und des r in ganzen Zahlen gilt, so kann sie für $n=1$, wobei $\int 1^r = 1$ wird, auch geschrieben werden:

$$1 = \tfrac{1}{r+1} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} C_1^r B_1 - \tfrac{1}{4} C_3^r B_2 + \tfrac{1}{6} C_5^r B_3 - \tfrac{1}{8} C_7^r B_4$$

$$+ \tfrac{1}{10} C_9^r B_5 \text{ etc. bis } (1-)^{\frac{r+2}{2}} \cdot B_{\frac{r}{2}} \text{ oder bis } (-1)^{\frac{r+1}{2}} \cdot \tfrac{r}{2} B_{\frac{r-1}{2}}$$

je nachdem r gerade oder ungerade ist. Aus ihr gehen dann nach der Reihe für $r = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ etc. folgende specielle Formeln hervor:

$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$

$1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + B_1$; also $B_1 - \frac{1}{6}$

$1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{3}{2} B_1$; also abermals $B_1 = \frac{1}{6}$

$1 = \frac{1}{5} + \frac{1}{2} + 2 B_1 - B_2$; also $B_2 = \frac{1}{30}$

$1 = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} + \frac{5}{2} B_1 - \frac{5}{2} B_2$; also abermals $B_2 = \frac{1}{30}$

$1 = \frac{1}{7} + \frac{1}{2} + 3 B_1 - 5 B_2 + B_3$; also $B_3 = \frac{1}{42}$

$1 = \frac{1}{8} + \frac{1}{2} + \frac{7}{2} B_1 - \frac{35}{4} B_2 + \frac{7}{2} B_3$; also wieder $B_3 = \frac{1}{42}$

u. s. w., so dass, wie hier nachgewiesen, dieselben zur successiven Berechnung der Bernoullischen Zahlen gebraucht werden können.

11. $\int\limits_1 C(n) = \int (n^1) = \frac{n(n+1)}{1.2}$

12. $\int\limits_2 C(n) = \frac{1}{2}\left[\int\limits_1 C(n) \times \int (n^1) - \int (n^2)\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{n^2(n+1)^2}{2.2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{2.3}\right]$

$= \frac{(n-1)n(n+1)(3n+2)}{1.2.3.4}$

z. B. $\int\limits_2 C(7) = \frac{6.7.8.23}{1.2.3.4} = 14.23 = 322$

$$\begin{array}{rr|rl} \text{Probe:} & 1.2+1.3+1.4+1.5+1.6+1.7 & = & 27 \\ & +2.3+2.4+2.5+2.6+2.7 & = & 50 \\ & +3.4+3.5+3.6+3.7 & = & 66 \\ & +4.5+4.6+4.7 & = & 72 \\ & +5.6+5.7 & = & 65 \\ & +6.7 & = & 42 \\ & \text{Summe:} & & 322 \end{array}$$

Ferner ist $\int\limits_2 C(2) = 2$; $\int\limits_2 C(3) = 11$; $\int\limits_2 C(4) = 35$; $\int\limits_2 C(5) = 85$

$\int\limits_2 C(6) = 175$; $\int\limits_2 C(8) = 546$; $\int\limits_2 C(9) = 870$; $\int\limits_2 C(10) = 1320$

13. $\int\limits_3 C(n) = \frac{1}{3}\left[\int (n^3) - \int\limits_1 C(n) \times \int (n^2) + \int\limits_2 C(n) \times \int (C^1)\right]$

$= \frac{1}{3}\left[\frac{n^2(n+1)^2}{4} - \frac{n(n+1)}{2} . \frac{n(n+1)(2n+1)}{2.3} + \frac{(n-1)n(n+1)(3n+1)}{2.3.4} . \frac{n(n+1)}{2}\right]$

$= \frac{(n-2)(n-1)}{3.4} . \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

z. B. $\int\limits_3 C(7) = \frac{5.6}{3.4} . \frac{7^2.8^2}{4} = 5.49.8 = 1960$

Probe: $[1.2.3+1.2.4+1.2.5+1.2.6+1.2.7] + [1.3.4+1.3.5+1.3.6+1.3.7] +$
$[1.4.5+1.4.6+1.4.7] + [1.5.6+1.5.7] + 1.6.7$
$+ [2.3.4+2.3.5+2.3.6+2.3.7] + [2.4.5+2.4.6+2.4.7] +$
$[2.5.6+2.5.7] + 2.6.7$
$+ [3.4.5+3.4.6+3.4.7] + [3.5.6+3.5.7] + 3.6.7$
$+ [4.5.6+4.5.7] + 4.6.7 + 5.6.7 = 1960.$

Ferner ist $\int\limits_3 C(2) = 0$; $\int\limits_3 C(3) = 6$; $\int\limits_3 C(4) = 50$; $\int\limits_3 C(5) = 225$

$\int\limits_3 C(6) = 735$; $\int\limits_3 C(8) = 4536$; $\int\limits_3 C(9) = 9450$; $\int\limits_3 C(10) = 18150$

14. $\int\limits_4 C(n) = \frac{1}{4}\left[-\int (n^4) + \int\limits_1 C(n) . \int (n^3) - \int\limits_2 C(n) \int (n^2) + \int\limits_3 C(n) . \int (n^1)\right]$

$= \frac{1}{4}\left[-\frac{n(n+1)(2n+1)3n^2+3n-1)}{1.2.3.5} + \frac{n(n+1)}{1.2} . \frac{n^2(n+1)^2}{4}\right.$

$\left. - \frac{(n-1)n(n+1)(3n+2)}{1.2.3.4} . \frac{n(n+1)(2n+1)}{1.2.3} + \frac{(n-2)(n-1)}{3.4} . \frac{n^2(n+1)^2}{4} . \frac{n(n+1)}{1.2}\right]$

$$=\frac{(n-3)(n-2)(n-1)n(n+1)}{1.2.3.4.5.6}\cdot\frac{(15n^3+15n^2-10n-8)}{8}$$

z. B. $\int_4 C(1)=\int_4 C(2)=\int_4 C(3)=0$

$\int_4 C(4)=24$; $\int_4 C(5)=274$; $\int_4 C(6)=1624$

$\int_4 C(7)=6769$; $\int_4 C(8)=22449$; $\int_4 C(9)=63273$

$\int_4 C(10)=157773$ u. s. w.

15. $$\int_5 C(n)=\tfrac{1}{5}\left[\int(n^5)-\int_1 C(n).\int(n^4)+\int_2 C(n).\int(n^3)-\int_3 C(n)\int(n^2)+\int_4 C(n)\int(n^1)\right]$$

$$=\tfrac{1}{5}\left[\frac{n^2(n+1)^2}{4}\cdot\frac{(2n^2+2n-1)}{3}-\frac{n(n+1)}{2}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{1.2.3.5}\right.$$

$$+\frac{(n-1)n(n+1)(3n+2)}{1.2.3.4}\cdot\frac{n^2(n+1)^2}{4}-\frac{(n-2)(n-1)}{3.4}\cdot\frac{n^2(n+1)^2}{4}\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{1.2.3}$$

$$\left.+\frac{(n-3)(n-2)(n-1)n(n+1)(15n^3+15n^2-10n-8)}{1.2.3.4.5.6.8}\cdot\frac{n(n+1)}{2}\right]$$

$$=\frac{(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)n^2(n+1)^2.(3n^2-n-6)}{1.2.3.4.5.6.16}$$

z. B. $\int_5 C(1)=\int_5 C(2)=\int_5 C(3)=\int_5 C(4)=0$; dagegen

$\int_5 C(5)=120$; $\int_5 C(6)=6^2.7^2=1764$; $\int_5 C(7)=2^2.7^2.67=13132$

$\int_5 C(8)=67284$; $\int_5 C(9)=269325$; $\int_5 C(10)=902055$

16. $$\int_6 C(n)=\tfrac{1}{6}\left[-\int(n^6)+\int_1 C(n).\int(n^5)-\int_2 C(n)\int(n^4)+\int_3 C(n)\int(n^3)-\int_4 C(n)\int(n^2)\right.$$

$$\left.+\int_5 C(n)\int(n^1)\right]$$

$$=\tfrac{1}{6}\left[-\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^4+6n^3-3n+1)}{1.2.3.7}+\frac{n(n+1)}{2}\times\right.$$

$$\frac{(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)n^2(n+1)^2(3n^2-n-6)}{1.2.3.4.5.6.16}-\frac{(n-1)n(n+1)(3n+2)}{1.2.3.4}\times$$

$$\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{1.2.3.5}+\frac{(n-2)(n-1)n^2(n+1)^2}{3.4.4}\cdot\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$-\frac{(n-3)(n-2)(n-1)n(n+1)(15n^3+15n^2-10n-8)}{1.2.3.4.5.6.8}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{1.2.3}$$

$$\left.+\frac{(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)n^2(n+1)^2.(3n^2-n-6)}{1.2.3.4.5.6.16}\cdot\frac{n(n+1)}{1.2}\right]$$

$$=\frac{(n-5)(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)n(n+1)(63n^5-315n^3-224n^2+140n+96)}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.8}$$

z. B. $\int_6 C(1)=\int_6 C(2)=\int_6 C(3)=\int_6 C(4)=\int_6 C(5)=0$; dagegen

$\int_6 C(6)=720; \int_6 C(7)=1749; \int_6 C(8)=118124$

$\int_6 C(9)=723680; \int_6 C(10)=3416930.$

Die weitere Entwickelung solcher $\int C$-Formeln wird, wie aus ihrer beispielsweise gezeigten Zusammensetzung einleuchtet, auf dem eingeschlagenen Wege immer beschwerlicher. Die nachfolgenden Betrachtungen können indess zu einer bedeutenden Verminderung der Mühseligkeit des Verfahrens beitragen.

Nach 8. lässt sich jede $\int C$-Formel aus Formeln für die Potenzsummen allein zusetzen und muss deshalb, nach der Art dieser Zusammensetzung zu schliessen, eine Gestalt annehmen, wie sie der Summenformel einer arithmetischen Reihe höherer Ordnung zukommt. Eine nähere Betrachtung dieser Zusammensetzung zeigt in Uebereinstimmung mit den vorstehend entwickelten $\int C$-Formeln, dass der äquivalente Ausdruck für $\int_x C(n)$ entweder die Summenformel einer Reihe des $(2x-1)$sten Ranges, oder das allgemeine Glied einer Reihe des 2xten Ranges, mit dem Anfangsgliede 0, sein müsse.

Es bilden also die aus den einzelnen Formeln der $\int C$ für $n=1, 2, 3, 4$ etc. entwickelten Werthe immer arithmetische Reihen von einem dem doppelten C-index entsprechenden Range. Hierauf könnte man also die Gleichung

17. $\int_x C(n)=\alpha n^{2x}+\beta n^{2x-1}+\gamma n^{2x-2}+\ldots.+\mu n$ gründen und folgeweise

18. $\int_x C(n+1)=\alpha(n+1)^{2x}+\beta(n+1)^{2x-1}+\gamma(n+1)^{2x-2}+\ldots.+\mu(n+1)$ setzen.

Die Subtraktion gebe dann

19. $$\int_x C(n+1)-\int_x C(n)=\alpha\left[(n+1)^{2x}-n^{2x}\right]+\beta\left[(n+1)^{2x-1}-n^{2x-1}\right]+\gamma\left[(n+1)^{2x-2}-n^{2x-2}\right] + \ldots\ldots\ldots\ldots + \mu.$$

Es ist aber, wie leicht verständlich, $\int_x C(n+1)-\int_x C(n)=(n+1)\int_{x-1} C(n)$ daher

20. $$(n+1)\int_{x-1} C(n)=\alpha\left[2x.n^{2x-1}+\frac{2x(2x-1)}{1.2}n^{2x-2}+\frac{2x(2x-1)(2x-2)}{1.2.3}n^{2x-3}+\ldots.+1\right]$$
$$+\beta\left[(2x-1)n^{2x-2}+\frac{(2x-1)(2x-2)}{1.2}n^{2x-3}+\frac{(2x-1)(2x-2)(2x-3)}{1.2.3}n^{2x-4}+\ldots.+1\right]$$
$$+\gamma\left[(2x-2)n^{2x-3}+\frac{(2x-2)(2x-3)}{1.2}n^{2x-4}+\frac{(2x-2)(2x-3)(2x-4)}{1.2.3}n^{2x-5}+\ldots.+1\right]$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+\mu.$$

Da auch hierbei eine successive Berechnung der $\int C$-Formeln vorausgesetzt wird, so

ist $\int\limits_{x-1} C(n)$ ein Ausdruck, den man kennt und nach Potenzen des n ordnen kann. Dieselbe Ordnung der rechten Seite bietet dann zur Bestimmung von $\alpha, \beta, \gamma \ldots \mu$ eine ausreichende Coefficientenvergleichung dar und die Substitution der Werthe in 17) bringt die Sache zum Schluss:

z. B. ist $\int\limits_2 C(n) = \alpha n^4 + \beta n^3 + \gamma n^2 + \delta n$, also

$$\int\limits_2 C(n+1) = \alpha(n+1)^4 + \beta(n+1)^3 + \gamma(n+1)^2 + \delta(n+1)$$

also $\int\limits_2 C(n+1) - \int\limits_2 C(n)$, oder $(n+1)\int\limits_1 C(n)$, oder $(n+1)\frac{n(n+1)}{2}$, oder

$$\tfrac{1}{2}n^3 + n^2 + \tfrac{1}{2}n = \alpha(4n^3+6n^2+4n+1) + \beta(3n^2+3n+1) + \gamma(2n+1) + \delta$$
$$= 4\alpha . n^3 + (6\alpha+3\beta)n^2 + (4\alpha+3\beta+2\gamma)n + (\alpha+\beta+\gamma+\delta)$$

zu setzen und daraus zu entnehmen:

$4\alpha = \frac{1}{2}$ | $4\alpha + 3\beta + 2\gamma = \frac{1}{2}$ | woraus folgt:
$6\alpha + 3\beta = 1$ | $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0$ | $\alpha = \frac{1}{8}, \beta = \frac{1}{12}, \gamma = -\frac{1}{8}$ und $\delta = -\frac{1}{12}$

so dass $\int\limits_2 C(n) = \frac{1}{8}n^4 + \frac{1}{12}n^3 - \frac{1}{8}n^2 - \frac{1}{12}n = \frac{1}{8}n^2(n^2-1) + \frac{1}{12}n(n^2-1)$

$$= \frac{(3n^2+2n)}{24}(n^2-1) = \frac{n(3n+2)(n-1)(n+1)}{1.2.3.4} = \frac{(n-1)n(n+1)(3n+2)}{2.3.4}$$

sein muss, — wie es auch oben in 12. gefunden wurde. Aehnlich würde sein:

$$(n+1)\int\limits_2 C(n) = \alpha(6n^5+15n^4+20n^3+15n^2+6n+1) + \beta(5n^4+10n^3+10n^2+5n+1)$$
$$+ \gamma(4n^3+6n^2+4n+1) + \delta(3n^2+3n+1) + \varepsilon(2n+1) + \zeta, \text{ oder}$$
$$\tfrac{1}{8}n^5 + \tfrac{5}{24}n^4 - \tfrac{1}{24}n^3 - \tfrac{5}{24}n^2 - \tfrac{1}{12}n = 6\alpha . n^5 + (15\alpha+5\beta)n^4 + (20\alpha+10\beta+4\gamma)n^3$$
$$+ (15\alpha+10\beta+6\gamma+3\delta)n^2 + (6\alpha+5\beta+4\gamma+3\delta+2\varepsilon)n$$
$$+ (\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon+\zeta)$$

also $6\alpha = \frac{1}{8}$ | Daher $\alpha = +\frac{1}{48}$
$15\alpha + 5\beta = \frac{5}{24}$ | $\beta = -\frac{1}{48}$
$20\alpha + 10\beta + 4\gamma = -\frac{1}{24}$ | $\gamma = -\frac{3}{48}$
$15\alpha + 10\beta + 6\gamma + 3\delta = -\frac{5}{24}$ | $\delta = +\frac{1}{48}$
$6\alpha + 5\beta + 4\gamma + 3\delta + 2\varepsilon = -\frac{1}{12}$ und | $\varepsilon = +\frac{2}{48}$
$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \zeta = 0$ | $\zeta = 0$

folglich $\int\limits_3 C(n) = \frac{n^6 - n^5 - 3n^4 + n^3 + 2n^2}{48} = \frac{(n-2)(n-1)}{3.4} \cdot \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$, wie in 13.

Wie der Augenschein lehrt, nimmt jede der $\int C$-Formeln zuletzt die Produktform an und zwar begründeter Erwartung entsprechend in der Weise, dass man formell als richtig setzen darf:

21. $$\int\limits_x C(n) = \frac{(n-x+1)(n-x+2)(n-x+3)\ldots(n-1).n(n+1)}{1.2.3\ldots\ldots\ldots(x-1).\;1.2} \times [An^{x-1} + Bn^{x-2} + Cn^{x-3} + \ldots + Mn + N]$$

Denn da $\int\limits_x C(n)$ verschwindet, so lange n kleiner als x ist, d. h. für n = 1, 2, 3, 4 ....(x—1) gleich 0 wird, so muss der Ausdruck rechts die Faktoren (n—1) bis zurück auf (n—x+1) enthalten. Die Anwesenheit des Faktors n erklärt sich aus 17. und die

des Faktors (n + 1) stellt sich zufolge der Gleichung $\int_x C(n+1) - \int_x C(n) = (n+1)\int_{x-1} C(n)$ als eine nothwendige heraus. Der vermuthliche Nenner $1.2.3\ldots(x-1)\times 1.2$ bedarf keiner Rechtfertigung, da sein Wegfall nur eine Modification der Coefficienten A, B, C.... M, N zur Folge haben würde, ohne die Richtigkeit des Totalwerthes zu berühren. Die nothwendige Gradhöhe des ganzen Ausdrucks ist durch die angenommene Form erreicht, daher die vorstehende Formel (21) unbedenklich geeignet, den weitern Schlüssen behufs Ermittelung einer noch zweckmässigeren Ableitungsart der $\int C$-Formeln zum Grunde gelegt zu werden. Nach ihr hat man also

$$22.\quad \int_x C(n+1) = \frac{(n-x+2)(n-x+3)(n-x+4)\ldots n(n+1)(n+2)}{1.2.3\ldots(x-1).1.2}\Big[A(n+1)^{x-1} + B(n+1)^{x-2} + C(n+1)^{x-3} + \ldots + M(n+1) + N\Big]$$

Die Subtraktion der 21., mit Rücksicht auf die Formel

$\int_x C(n+1) - \int_x C(n) = (n+1)\int_{x-1} C(n)$, giebt nach Hebung des Faktors (n+1)

$$23.\quad \int_{x-1} C(n) = \frac{(n-x+2)(n-x+3)(n-x+4)\ldots n(n+2)}{1.2.3\ldots(x-1).1.2}\Big[A(n+1)^{x-1} + B(n+1)^{x-2} + C(n+1)^{x-3} + \ldots + M(n+1) + N\Big] - \frac{(n-x+1)(n-x+2)(n-x+3)\ldots n}{1.2.3\ldots(x-1).1.2}\Big[An^{x-1} + Bn^{x-2} + Cn^{x-3} + \ldots + Mn + N\Big]$$

Der weitere Verfolg dieser Rechnung erfordert die genaue Kenntniss des $\int_{x-1} C(n)$ und macht daher ein successives Vorschreiten in der Bestimmung der $\int C$-Formeln, nach der Ordnung $\int_1 C$, $\int_2 C$, $\int_3 C$ etc. nothwendig. Zum Beispiel diene nun die Substitution von $\int_3 C(n) = \frac{(n-2)(n-1)}{3.4}\,\frac{n^2(n+1)^2}{4}$ (aus 20.) an Stelle von $\int_{x-1} C(n)$. Dann ist, da x jetzt 4 bedeutet,

$$24.\quad \frac{(n-2)(n-1)n^2(n+1)^2}{3.4.4} = \frac{(n-2)(n-1)n(n+2)}{1.2.3.1.2}\Big[A(n+1)^3 + B(n+1)^2 + C(n+1) + D\Big] - \frac{(n-3)(n-2)(n-1)n}{1.2.3.1.2}\Big[An^3 + Bn^2 + Cn + D\Big],$$ oder gehoben

$$25.\quad \frac{n(n+1)^2}{4} = (n+2)\Big[A(n+1)^3 + B(n+1)^2 + C(n+1) + D\Big] - (n-3)\Big[An^3 + Bn^2 + Cn + D\Big],$$ oder

$$26.\quad n^3 + 2n^2 + n = 4A(n+1)^3(n+2) + 4B(n+1)^2(n+2) + 4C(n+1)(n+2) + 4D(n+2) - 4An^3(n-3) - 4Bn^2(n-3) - 4Cn(n-3) - 4D(n-3)$$
$$= 32An^3 + (36A + 28B)n^2 + (28A + 20B + 24C)n + (8A + 8B + 8C + 20D).$$ Daher hat man

| | |
|---|---|
| $32A = 1$ | folglich $A = \frac{1}{32}$ |
| $36A + 28B = 2$ | $B = \frac{1}{32}$ |
| $28A + 20B + 24C = 1$ und | $C = \frac{1}{48}$ |
| $8(A + B + C) + 20D = 0$ | $D = -\frac{1}{60}$ |

und es ist

$$27.\quad \int_4 C(n) = \frac{(n-3(n-2)(n-1)n(n+1)}{1.2.3.1.2} \cdot \left[\frac{n^3}{32} + \frac{n^2}{32} - \frac{n}{48} - \frac{1}{60}\right]$$

$$= \frac{(n-3)(n-2)(n-1)n(n+1)(15n^3+15n^2-10n-8)}{1.2.3.4.5.6.8},$$ wie es nach 14. sein soll.

Eine andere recurrente Beziehung wird erlangt, wenn man der allgemeinen Formel $\int_x C(n+1) - \int_x C n = (n+1)\int_{x-1} C(n)$ gemäss

$$\int_x C(n) - \int_x C(n-1) = n\int_{x-1} C(n-1)$$

$$\int_x C(n-1) - \int_x C(n-2) = (n-1)\int_{x-1} C(n-2)$$

$$\int_x C(n-2) - \int_x C(n-3) = (n-2)\int_{x-1} C(n-3)$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\int_x C(x) - \int_x C(x-1) = x\int_{x-1} C(x-1)$$ setzt und summirt, wodurch man erhält

$$28.\quad \int_x C(n) = n\int_{x-1} C(n-1) + (n-1)\int_{x-1} C(n-2) + (n-2)\int_{x-1} C(n-3) + \ldots + x\int_{x-1} C(x-1)$$

$$= \int^n\!\!\int_{x-1} C(n-1) \left(\begin{matrix}\text{von } n = n\\ \text{bis } n = x\end{matrix}\right);$$

denn das beim Heben links übrig bleibende Glied $-\int_x C(x-1)$ ist für sich 0. — Hiernach würde das vorige Beispiel sich so gestalten, dass man hätte

$$29.\quad \int_4 C(n) = n.\int_3 C(n-1) + (n-1)\int_3 C(n-2) + (n-2)\int_3 C(n-3) + (n-3)\int_3 C(n-4)$$

$$+ (n-4)\int_3 C(n-5) + \ldots + 4\int_3 C(3)$$

$$= \int^n\!\!\int_3 C(n-1) \left[\begin{matrix}\text{von } n = n\\ \text{bis } n = 4\end{matrix}\right]$$ und ausführlich:

$$= \frac{n(n-3)(n-2)}{3.4}\left[\frac{(n-1)n}{2}\right]^2 + \frac{(n-1)(n-4)(n-3)}{3.4}\left[\frac{(n-2)(n-1)}{2}\right]^2$$

$$= (n-2)\frac{(n-5)(n-4)}{3.4}\left[\frac{(n-3)(n-2)}{2}\right]^2 + (n-3)\frac{(n-6)(n-5)}{3.4}\left[\frac{(n-4)(n-3)}{2}\right]^2$$

$$+ (n-4)\frac{(n-7)(n-6)}{3.4}\left[\frac{(n-5)(n-4)}{2}\right]^2 + \ldots + 4\,\frac{1.2}{3.4}\left[\frac{3.4}{2}\right]^2$$

$$= \frac{(n-3)(n-2).(n-1)^2.n^3}{48} + \frac{(n-4)(n-3)(n-2)^2(n-1)^3}{48}$$

$$+ \frac{(n-5)(n-4)(n-3)^2(n-2)^3.}{48}$$

$$+\frac{(n-6)(n-5)(n-4)^2.(n-3)^3}{48}+\frac{(n-7)(n-6)(n-5)^2(n-4)^3}{48}+\ldots+24.$$

Von der allgemeinen Reihe (28) sind bei ihrer Anwendung jedesmal $(n-x+1)$, hier also $(n-3)$, Glieder zu nehmen. Also wäre beispielsweise

$$\int\limits_4 C\,4=\frac{1.2.3^2.4^3}{48}=\frac{2.9.64}{48}=\frac{2.9.4}{3}=2.3.4=24 \quad \text{(S. 14.)}$$

$$\int\limits_4 C\,5=\frac{2.3.4^2.5^3}{48}+\frac{1.2.3^2.4^3}{48}=250+24=274$$

$$\int\limits_4 C\,6=\frac{3.4.5^2.6^3}{48}+\frac{2.3.4^2.5^3}{48}+\frac{1.2.3^2.4^3}{48}=1350+250+24=1624$$

$$\int\limits_4 C\,7=\frac{4.5.6^2.7^3}{48}+\frac{3.4.5^2.6^3}{48}+\frac{2.3.4^2.5^3}{48}+\frac{1.2.3^2.4^3}{48}=5145+1350+250$$
$$+24=6769,$$

wobei ersichtlich ist, dass jede folgende Summe gleich der nächst vorangehenden, vermehrt um das erste Glied ihrer eigenen Reihe, oder dass allgemein $\int\limits_4 C(n)=\int\limits_4 C(n-1)$ $+\frac{(n-3)(n-2)(n-1)^2.n^3}{48}$ ist. Dies verhilft zu einer leichten Weiterberechnung der successiven Werthe von $\int\limits_4 C(n)$ und könnte in allen ähnlichen, d. h. in den Specialfällen von $\int\limits_x C(n)$ benutzt werden.

Schliesslich gehe ich noch zu der naheliegenden Aufgabe über, Summenformeln für die Multiplicativ-Combinationen der Elemente $m+1$, $m+2$, $m+3$, $m+4\ldots$ bis $m+n$ herzuleiten.

Für diesen Zweck möge die bisher gebrauchte Bezeichnung nur darin eine Aenderung erfahren, dass statt des blossen n die Grenzelemente (1stes $=m+1$ und letztes $=m+n$) gesetzt werden. Dann ist sogleich zu schreiben:

30. $$\int\limits_1 C\begin{pmatrix}m+1\\ m+n\end{pmatrix}=\frac{n(n+1)}{2}+mn=\frac{n(2m+n+1)}{2}$$

Ersetzt man nun einstweilen die zweiten Theile der binomialen Elemente in den einzelnen Binionen durch die unbestimmten Charaktere $\alpha, \beta;\ \alpha', \beta';\ \alpha'', \beta'';\ \alpha''', \beta'''$ u. s. w. bis $\alpha^v, \beta^v$, so hat man diese Binionen und ihre Auflösungen in folgenden Colonnen vor Augen:

$$\begin{array}{l}
(m+\alpha)(m+\beta)=m^2+(\alpha+\beta)m+\alpha\beta\\
(m+\alpha')(m+\beta')=m^2+(\alpha'+\beta')m+\alpha'\beta'\\
(m+\alpha'')(m+\beta'')=m^2+(\alpha''+\beta'')m+\alpha''\beta''\\
(m+\alpha''')(m+\beta''')=m^2+(\alpha'''+\beta''')m+\alpha'''\beta'''\\
\quad\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots\\
(m+\alpha^v)(m+\beta^v)=m^2+(\alpha^v+\beta^v)m+\alpha^v\beta^v
\end{array}$$

Die Annahme, dass hierin alle Binionen der n Elemente $(m+1)$, $(m+2)$, $(m+3)$,.... $(m+n)$ erschöpft sein mögen, lässt den Schluss zu, dass jede der vier Verticalcolumnen so viele Glieder haben müsse, als n Elemente Binionen gewähren, d. h. $\frac{n(n-1)}{1.2}$. Fasst man nun jede Columne in eine Summe zusammen, so wird die erste durch das Zeichen

$\int C_2 \binom{m+1}{m+n}$ vertreten, die zweite ist $= \frac{n(n-1)}{1.2} m^2$ und die vierte $= \int C_2(n)$ — in der frühern Bedeutung. Was die dritte Columne betrifft, so muss man schliessen, dass die Unionen (1, 2, 3....n), welche hier in unbestimmten Charakteren ($\alpha, \beta$; $\alpha', \beta'$; $\alpha'', \beta''$ etc.) auftreten, die doppelte Frequenz der Gliederzahl haben, d. h. in einer Anzahl $= 2 . \frac{n(-1)}{1.2}$ darin vorhanden sind. Sie umfassen deshalb so viel Summen von Unionen der Elemente 1, 2, 3,....n, oder enthalten so oft $\int C_1(n)$, als der Quotient $\frac{2}{n} . \frac{n(n-1)}{1.2}$ angiebt. Hiernach ist die Summe der dritten Columne $= \frac{2}{n}\frac{n(n-1)}{1.2} . m \int C_1(n) = (n-1)m \times \int C_1(n)$. Die Zusammenstellung giebt also

$$31. \int C_2 \binom{m+1}{m+n} = \frac{n(n-1)}{1.2} m^2 + \frac{2}{n} . \frac{n(n-1)}{1.2} . m \int C_1(n) + \int C_2(n)$$

$$= \frac{n(n-1)}{1.2} m^2 + \frac{(n-1)n(n+1)}{1.2} m + \frac{(n-1)n(n+1)(3n+2)}{1.2.3.4}$$

$$= \frac{n(n-1)}{1.2}\left[m^2 + (n+1)m + \frac{(n+1)(3n+2)}{3.4}\right]$$

Für $m=0$ geht diese Formel, wie es sein muss, wieder in $\int C_2(n) = \frac{n(n-1)(n+1)(3n+2)}{1.2.3.4}$ über.

Beispiele: $\int C_2 \binom{4}{6} = \frac{3.2}{1.2}\left[9 + 4.3 + \frac{4.11}{3.4}\right] = 3.21 + 11 = 74$

Probe: $4.5 + 4.6 + 5.6 = 20 + 24 + 30 = 74$

$$\int C_2 \binom{3}{7} = \int C_2 \binom{2+1}{2+5} = \frac{5.4}{1.2}\left(4 + 6.2 + \frac{6.17}{3.4}\right) = 10\left(4 + 12 + \tfrac{17}{2}\right) = 10.24\tfrac{1}{2} = 245$$

Probe: $(3.4 + 3.5 + 3.6 + 3.7) + (4.5 + 4.6 + 4.7) + (5.6 + 5.7) + 6.7$
$= 66 + 72 + 65 + 42 = 245$

$$\int C_2 \binom{6}{12} = \int C_2 \binom{5+1}{5+7} = \frac{7.6}{1.2}\left(25 + 8.5 + \frac{8.23}{3.4}\right) = 21\left(25 + 40 + \frac{46}{3}\right) = 1687$$

Um die obige Formel $\left\{\int C_2 \binom{m+1}{m+n}\right\}$ für die Bezeichnung $\int C_2 \binom{n}{m}$ giltig zu machen, hat man in 31. n in $m-n+1$ und m in $(n-1)$ zu verwandeln, wodurch man erhält:

$$32. \int C_2 \binom{n}{m} = \frac{(m-n+1)(m-n)}{1.2} . \left[(n-1)^2 + (m-n+2)(n-1) + \frac{(m-n+2)(3m-3n+5)}{3.4}\right]$$

$$= \frac{(m-n)(m-n+1)}{1.2} . \left[(m+1)(n-1) + \frac{(m-n+2)(3m-3n+5)}{3.4}\right]$$

z. B. ist $\int C_2 \binom{4}{6} = \frac{3.2}{1.2}\left(9 + 4.3 + \frac{4.11}{3.4}\right) = 3.21 + 11 = 74$

oder $= \frac{2.3}{1.2}\left(7.3 + \frac{4.11}{3.4}\right) = 3\left(21 + \frac{11}{3}\right) = 63 + 11 = 74$

$$\int C_2 \binom{3}{7} = \frac{4.5}{2}\left(8.2 + \frac{6.17}{3.4}\right) = 10\left(16 + \frac{17}{2}\right) = 160 + 85 = 245$$

$\int_2 C\binom{6}{12} = \frac{6.7}{2}\left(13.5+\frac{8.23}{3.4}\right) = 21\left(65+\frac{46}{3}\right) = 1687$, alles wie vorhin.

Da nun n und m in der Zahlenreihe beliebig weit zurückliegen können, so dass n allein, oder auch m mit negativ, oder eine von ihnen 0 wird, so darf man die Formel auch in allen diesen Fällen mit Aussicht auf Richtigkeit anwenden, wie folgende Beispiele und Proben zeigen:

$$\int_2 C\binom{-3}{+2} = \frac{5.6}{1.2}\left(3.-4+\frac{7.20}{3.4}\right) = 15\left(-12+\frac{35}{3}\right) = -180+175 = -5$$

Probe: $(-3)(-2)+(-3)(-1)+(-3)0+(-3)1+(-3)2+(-2)(-1)+(-2)0+(-2)1$
$+(-2)2+(-1)0+(-1)1+(-1)2+0.1+0.2+1.2 = -5$

$$\int_2 C\binom{0}{3} = \frac{3.4}{1.2}.\left(-4+\frac{5.14}{3.4}\right) = 6\left(-4+\frac{35}{6}\right) = -24+35 = 11$$

also, wie zu erwarten, übereinstimmend mit $\int_2 C(3)$.

$\int_2 C\binom{-5}{-2}$ [was nicht $\int_2 C\binom{-2}{-5}$ geschrieben werden darf, da die vorangehende und kleinere Zahl, hier also $-5$ statt n obenstehen muss] ist $= \frac{3.4}{1.2}\left(6+\frac{5.14}{3.4}\right) = 71$

Probe: $(-5)(-4)+(-5)(-3)+(-5)(-2)+(-4)(-3)+(-4)(-2)+(-3)(-2) = 71$

33. Verbindet man ferner die Glieder der Reihe $(m+1)$, $(m+2)$, $(m+3)\ldots.(m+n)$ zu Dreien und nennt jetzt die unbestimmten zweiten Theile $\alpha, \beta, \gamma$; $\alpha', \beta', \gamma'$; $\alpha'', \beta'', \gamma''$; u. s. w., so hat man für die Ternionen geltend:

$$(m+\alpha)(m+\beta)(m+\gamma) = m^3+(\alpha+\beta+\gamma)m^2+(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)m+\alpha\beta\gamma$$
$$(m+\alpha')(m+\beta')(m+\gamma') = m^3+(\alpha'+\beta'+\gamma')m^2+(\alpha'\beta'+\alpha'\gamma'+\beta'\gamma')m+\alpha'\beta'\gamma'$$
$$(m+\alpha'')(m+\beta'')(m+\gamma'') = m^3+(\alpha''+\beta''+\gamma'')m^2+(\alpha''\beta''+\alpha''\gamma''+\beta''\gamma'')m+\alpha''\beta''\gamma''$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$(m+\alpha^{v})(m+\beta^{v})(m+\gamma^{v}) = m^3+(\alpha^{v}+\beta^{v}+\gamma^{v})m^2+(\alpha^{v}\beta^{v}+\alpha^{v}\gamma^{v}+\beta^{v}\gamma^{v})m+\alpha^{v}\beta^{v}\gamma^{v}$$

und kann wieder unter Voraussetzung ihrer Vollzahl, $\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$, summirend setzen:

Erste Columne $= \int_3 C\binom{m+1}{m+n}$; zweite Columne $= \frac{n(n-1)(n-2)m^3}{1.2.3}$; dritte Columne $= \frac{3}{n}.\frac{n(n-1)(n-2)m^2}{1.2.3}\int_1 C(n)$ oder $\frac{(n-1)(n-2)m^2}{1.2}\int_1 C(n)$; letzte $= \int_3 C(n)$.

Die vorletzte Columne enthält $3.\frac{n(n-1))n-2)}{1.2.3}$ Binionen, welche sämmtlich Glieder verschiedener $\int_2 C(n)$ sind.

Wie oft $\int_2 C(n)$ daraus zusammengesetzt werden kann, sagt der Quotient:

$3.\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}:\frac{n(n-1)}{1.2}$ oder $(n-2)$. Diese Columne giebt folglich die Summe

$\frac{3}{\frac{n(n-1)}{1.2}}.\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}.m\int_2 C(n)$ oder $(n-2)m\int_2 C(n)$. Man hat also

34. $\int_3 C\binom{m+1}{m+n} = \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}m^3+\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}m^2\int_1 C(n)+\frac{(n-2)}{1}m\int_2 C(n)+\int_3 C(n)$,

was sich nach Substitution der $\int C$-werthe auf

$$=\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\left[m^3+\frac{3(n+1)}{2}m^2+\frac{(n+1)(3n+2)}{4}m+\frac{n(n+1)^2}{8}\right]$$

zurückbringen lässt. — Beispiele:

$$\int\limits_3 C\binom{3+1}{3+4}=\frac{4.3.2}{1.2.3}\left(27+\frac{3.5.9}{2}+\frac{5.14.3}{4}+\frac{4.25}{8}\right)=4\left(27+\frac{135}{2}+\frac{105}{2}+\frac{25}{2}\right)$$

$$=4\left(27+\frac{265}{2}\right)=108+530=638.$$

Probe: $4.5.6+4.5.7+4.6.7+5.6.7=638$

$$\int\limits_3 C\binom{6}{9}=\int\limits_3 C\binom{5+1}{5+4}=\frac{4.3.2}{1.2.3}\left(125+\frac{3.5.25}{2}+\frac{5.14.5}{4}+\frac{4.25}{8}\right)=1650$$

Probe: $6.7.8+6.7.9+6.8.9+7.8.9=1650.$

Will man auch hier wieder die Grundformel auf das Zeichen $\int\limits_3 C\binom{n}{m}$ einrichten, so hat man statt des obigen n und m respektive zu setzen $(m-n+1)$ und $(n-1)$. Folglich ist

35. $$\int\limits_3 C\binom{n}{m}=\frac{(m-n+1)(m-n)(m-n-1)}{1.2.3}.\left[(n-1)^3+3\frac{(m-n+2)}{2}(n-1)^2\right.$$
$$\left.+\frac{(m-n+2)(3m-3n+5)(n-1)}{4}+\frac{(m-n+1)m-n+2)^2}{8}\right], \text{ oder}$$
$$=\frac{(m-n+1)(m-n)(m-n-1)}{1.2.3}.\left[\frac{(3m-n+4)(n-1)^2}{2}+\frac{(m-n+2)}{8}.\{(m-n)(m+5n-3)\right.$$
$$\left.+2(5n-4)\}\right].$$ Hiernach ist

$$\int\limits_3 C\binom{4}{7}=638 \text{ und } \int\limits_3 C\binom{6}{9}=1650, \text{ wie oben, und}$$

$$\int\limits_3 C\binom{-2}{+5}=\frac{8.7.6}{1.2.3}\left(-27+\frac{3.9.9}{2}+\frac{9.26.(-3}{4}+\frac{8.9^2)}{8}\right)$$

$$=8.7\left(-27+\frac{243}{2}-\frac{351}{2}+81\right)=8.7\,(-27-54+81)=0, \text{ oder auch}$$

$$=8.7\left[\frac{21.9}{2}+\frac{9}{8}\{7.(-8)-28\}\right]=8.7\left[\frac{21.9}{2}-63-\frac{63}{2}\right]=8.7\,(63-63)=0$$

wie es sein muss; denn es giebt auch die Probe:

$$(-2)(-1)[0+1+2+3+4+5]+(-2).0.[1+2+3+4+5]+(-2)1.[2+3+4+5]$$
$$(-2).2[3+4+5]+(-2).3.[4+5]+(-2).4.5+(-1)0.[1+2+3+4+5]$$
$$+(-1)1.[2+3+4+5]+(-1)2(3+4+5)+(-1)3[4+5]+(-1)4.5$$
$$+0.1[2+3+4+5]+0.2[3+4+5]+0.3[4+5]+0.4.5+1.2(3+4+5)$$
$$+1.3(4+5)+1.4.5+2.3(4+5)+2.4.5+3.4.5=+225-255=0$$

Ferner hat man für die Summe der Multiplicativquaternionen bei ähnlichem Verfahren betreffs der Schematisirung wie der Syllogistik:

36. $$\int\limits_4 C\binom{m+1}{m+n}=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}.m^4+\left(\frac{4}{n}\right).\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}m^3\int\limits_1 C(n)$$
$$+\left(\frac{6}{\frac{n(n-1)}{1.2}}\right).\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}.m^2\int\limits_2 C(n)+\left(\frac{4}{\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}}\right)m\int\limits_3 C(n)+\int\limits_4 C(n)$$

$$=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}m^4+\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3}m^3\int C_1(n)+\frac{(n-2)(n-3)}{1.2}m^2\int C_2(n)$$

$$+\frac{(n-3)}{1}m\int C_3(n)+\int C_4(n)$$

$$=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}m^4+\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3}m^3.\frac{n(n+1)}{1.2}+\frac{(n-2)(n-3)}{1.2}m^2.\times\frac{(n-1)n(n+1)(3n+2)}{1.2.3.4}$$

$$+\frac{(n-3)}{1}m\frac{(n-2)(n-1)n^2(n+1)^2}{3.4.4}+\frac{(n-3)(n-2)(n-1)n(n+1)(15n^3+15n^2-10n-8)}{1.2.3.4.5.6.8}$$

$$=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}.\left[m^4+2(n+1)m^3+\frac{(n+1)(3n+2)m^2}{2}+\frac{n(n+1)^2.m}{2}\right.$$
$$\left.+(n+1)\left\{\frac{5(n+1)(3n^2-2)+2}{5.6.8}\right\}\right]$$

z. B. $\int C_4\binom{3}{7}=\int C_4\binom{\overset{m}{2+1}}{\underset{n}{2+5}}=\frac{5.4.3.2}{2.3.4}\left[16+12.8+\frac{6.17.4}{2}+\frac{5.36.2}{2}+6\left\{\frac{5.6.73+2}{5.6.8}\right\}\right]$

$$=5\left[16+96+204+180+\frac{274}{5}\right]=2754$$

$$\int C_4\binom{-3}{+11}=\int C_4\binom{\overset{m}{-4+1}}{\underset{n}{-4+15}}=\frac{15.14.13.12}{2.3.4}\left[256-32.64+\frac{16.47.16}{2}-\frac{15.16^2.4}{2}\right.$$
$$\left.+16\left\{\frac{80.673+2}{5.6.8}\right\}\right]=15.7.13\left[256-2048+6016-7680+\frac{53842}{15}\right]$$
$$=15.91\left[-3456+\frac{53842}{15}\right]=182182$$

Der Umgestaltung für das Zeichen $\int C_4\binom{n}{m}$ wegen hat man in der obigen Formel wieder $m-n+1$ statt $n$ und $n-1$ statt $m$ zu setzen, also zu schreiben:

37. $$\int C_4\binom{n}{m}=\frac{(m-n+1)(m-n)(m-n-1)(m-n-2)}{1.2.3.4}.\left[(n-1)^4+2(m-n+2)(n-1)^3\right.$$
$$+\frac{(m-n+2)(3m-3n+5)}{2}(n-1)^2+\frac{(m-n+1)(m-n+2)^2}{2}(n-1)$$
$$\left.+(m-n+2)^2.\left\{\frac{3(m-n+1)^2-2}{6.8}\right\}+\frac{(m-n+2)}{4.5.6}\right]$$

z. B. $\int C_4\binom{4}{7}=\frac{4.3.2.1}{1.2.3.4}\left[81+2.5.27+\frac{5.14.9}{2}+\frac{4.25.3}{2}+\frac{25.46}{6.8}+\frac{5}{4.5.6}\right]$
$$=81+270+315+150+24=840$$

Durch weitere Umformung erhält man

38. $$\int C_4\binom{n}{m}=\frac{(m-n+1)(m-n)(m-n-1)(m-n-2)}{1.2.3.4}.\left[\frac{1}{2}\{2(n-1)^2+(m-n+2)\times\right.$$
$$\left.(3m+n+1)\}(n-1)^2+\frac{(m-n+1)(m-n+2)^2.(m+7n-7)}{16}-\frac{(m-n+2)(5m-5n+9)}{3.5.8}\right]$$

und auch hieraus $\int C_4 \binom{4}{7} = 840$. Andere Beispiele:

$\int C_4 \binom{4}{8} = 5944; \int C_4 \binom{-2}{+2} = 4; \int C_4 \binom{0}{7} = 6769$, was mit $\int C_4 \binom{1}{7}$ stimmen muss und stimmt.

In der bisherigen Weise weiter schliessend und rechnend erhält man:

$$39.\quad \int C_5 \binom{m+1}{m+n} = \overset{n}{\underset{6}{K}} . \Big[ m^5 + \frac{\overset{5}{\underset{2}{K}}}{\overset{n}{\underset{2}{K}}} . m^4 \int C_1 (n) + \frac{\overset{5}{\underset{3}{K}}}{\overset{n}{\underset{3}{K}}} . m^3 \int C_2 (n)$$

$$+ \frac{\overset{5}{\underset{4}{K}}}{\overset{n}{\underset{4}{K}}} . m^2 \int C_3 (n) + \frac{\overset{5}{\underset{5}{K}}}{\overset{n}{\underset{5}{K}}} . m \int C_4 (n) + \frac{\overset{5}{\underset{6}{K}}}{\overset{n}{\underset{6}{K}}} . \int C_5 (n) \Big],$$

wo $\overset{n}{\underset{x}{K}}$ zur Bezeichnung des xten Coefficienten der nten Binomialpotenz dient, den des ersten Gliedes mitgezählt. — Hiernach ist auch

$$\int C_5 \binom{m+1}{m+n} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.2.3.4.5} . m^5 + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.2.3.4} . m^4 \int C_1 (n)$$

$$+ \frac{(n-2)(n-3))n-4)}{1.2.3} . m^3 \int C_2 (n) + \frac{(n-3)(n-4)}{1.2} m^2 \int C_3 (n)$$

$$+ \frac{(n-4)}{1} . m \int C_4 (n) + \int C_5 (n), \text{ und ähnlich}$$

$$40.\quad \int C_6 \binom{m+1}{m+n} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{1.2.3.4.5.6} . m^6$$

$$+ \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{1.2.3.4.5} m^5 \int C_1 (n)$$

$$+ \frac{(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{1.2.3.4} m^4 \int C_2 (n) + \frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{1.2.3} m^3 \int C_3 (n)$$

$$+ \frac{(n-4)(n-5)}{1.2} m^2 \int C_4 (n) + \frac{(n-5)}{1} m \int C_5 (n) + \int C_6 (n)$$

Für die Summe der Combinationen der kten Klasse aus den Elementen $m+1$, $m+2$, $m+3$ etc. bis $m+n$ hätte man analog zu setzen:

$$41.\quad \int C_k \binom{m+1}{m+n} = \overset{n}{\underset{k+1}{K}} . \Big] m^k + \frac{\overset{k}{\underset{2}{K}}}{\overset{n}{\underset{2}{K}}} . m^{k-1} . \int C_1 (n) + \frac{\overset{k}{\underset{3}{K}}}{\overset{n}{\underset{3}{K}}} . m^{k-2} \int C_2 (n) + \frac{\overset{k}{\underset{4}{K}}}{\overset{n}{\underset{4}{K}}} . m^{k-3} . \int C_3 (n)$$

$$+ \frac{\overset{k}{\underset{5}{K}}}{\overset{n}{\underset{5}{K}}} . m^{k-4} . \int C_4 (n) + \text{etc. bis} + \frac{\overset{k}{\underset{k+1}{K}}}{\overset{n}{\underset{k+1}{K}}} . \int C_k (n) \Big]$$

Es ist aber der angenommenen Bezeichnung für die Binomialcoefficienten gemäss:

$$\overset{n}{\underset{k+1}{K}} \cdot \frac{\overset{k}{\underset{x}{K}}}{\overset{n}{\underset{x}{K}}} = \overset{n-x+1}{\underset{k-x+2}{K}}$$ ; denn setzt man die Werthe dieser Symbole, nämlich

$$\overset{n}{\underset{k+1}{K}} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots \text{bis}\,(n-k+1)}{1.2.3 \text{ bis } k}; \quad \overset{k}{\underset{x}{K}} = \frac{k(k-1)(k-2)\ldots \text{ bis } (k-x+2)}{1.2.3\ldots \text{ bis } (x-1)};$$

$$\overset{n}{\underset{x}{K}} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots \text{bis}\,(n-x+2)}{1.2\ldots \text{bis}\,(x-1)} \text{ und } \overset{n-x+1}{\underset{k-x+2}{K}} = \frac{(n-x+1)(n-x)(n-x+1)\ldots \text{bis}\,(n-k+1)}{1.2.3\ldots \text{ bis } (k-x+1)},$$

so lässt sich die Identität der Gleichung

$\overset{n}{\underset{k+1}{K}} \cdot \overset{k}{\underset{x}{K}} = \overset{n}{\underset{x}{K}} \cdot \overset{n-x+1}{\underset{k-x+2}{K}}$ leicht nachweisen, indem man erhält:

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1).k(k-1)(k-2)\ldots(k-x+2)}{1.2.3\ldots\ldots\ldots k.1.2.3\ldots\ldots\ldots(x-1)} =$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-x+2).(n-x+1)(n-x)(k-x-1)\ldots(n-k+1)}{1.2.3\ldots\ldots\ldots(x-1).1.2.3\ldots\ldots\ldots\ldots(k-x+1)} \text{ oder gehoben}$$

$$\frac{k(k-1)(k-2)\ldots(k-x+2)}{1.2.3\ldots k} = \frac{1}{1.2.3\ldots\ldots(k-x+1)} \text{ oder}$$

$$\frac{k(-1)(k-2)\ldots(k-x+2).(k-x+1)\ldots 3.2.1}{1.2.3\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots k} = 1, \text{ d. i. } 1 = 1$$

Wendet man nun dieses Umwandlungsgesetz bei der Klammerauflösung in 41. an, so ist

42. $$\int_k C\binom{m+1}{m+n} = \overset{n}{\underset{k+1}{K}} . m^k + \overset{n-1}{\underset{k}{K}} . m^{k-1} . \int_1 C(n) + \overset{n-2}{\underset{k-1}{K}} . m^{k-2} \int_2 C(n) + \overset{n-3}{\underset{k-2}{K}} . m^{k-3} \int_3 C(n)$$
$$+ \overset{n-4}{\underset{k-3}{K}} . m^{k-4} . \int_4 C(n) \ldots \text{ bis } \int_k C(n)$$ — da $\overset{n-k}{\underset{n-k+1}{K}} = 1$ ist. Auf das Symbol $\int_k C\binom{n}{m}$ in der mehrfach erwähnten Substitutionsgrösse zurückgegangen, also auch

$$\int_k C\binom{n}{m} = \frac{(m-n+1)(m-n)(m-n-1)\ldots(m-n-k+2)}{1.2.3\ldots\ldots\ldots k}(n-1)^k$$
$$+ \frac{(m-n)(m-n-1)\ldots(m-n-k+2)}{1.2.3\ldots\ldots(k-1)} . (n-1)^{k-1} . \int_1 C(m-n+1)$$
$$+ \frac{(m-n-1)(m-n-2)\ldots(m-n-k+2)}{1.2.3\ldots\ldots(k-2)} . (n-1)^{k-2} . \int_2 C(m-n+1)$$
$$+ \frac{(m-n-2)(m-n-3)\ldots(m-n-k+2)}{1.2.3\ldots\ldots\ldots(k-3)} . (n-1)^{k-3} . \int_3 C(m-n+1)$$
$$+ \frac{(m-n-3)(m-n-4)\ldots(m-n-k+2)}{1.2.3\ldots\ldots\ldots(k-4)} (n-1)^{k-4} . \int_4 C(m-n+1)$$
$$+ \text{ etc. etc. bis } \int_k C(m-n+1)$$

Da diese Formel unsere Aufgabe in ihrer ganzen Allgemeinheit löst, so bleibt für diese Behauptung nur noch der Nachweis zu führen, dass und wie die besondern Formeln in ihr enthalten sind. Hierüber hinwegzugehen, gebieten indess unabweisbare Rücksichten.

**Sperling.**

# Jahresbericht.

## I. Schulchronik.

Das mit dem 30. September ablaufende Schuljahr hat am 15. October v. J. begonnen.

Bei der Morgenandacht des ersten Schultags wurde im Kreise der versammelten Lehrer und Schüler durch den unterzeichneten Berichterstatter die Introduction des G. L. Eugen Albert Trosien vollzogen, der vom 1. October v. J. ab als zweiter ordentlicher Lehrer und Religionslehrer an unserem Gymnasium angestellt ist. Derselbe wurde d. 13. April 1838 zu Danzig geboren und empfing seine Schulbildung auf dem Gymnasium seiner Vaterstadt. Aus diesem Ostern 1856 mit dem Zeugnisse der Reife zur Universität entlassen, studirte er zuerst in Halle, später in Königsberg Theologie und erhielt gleich nach abgelegtem Examen pro licentia concionandi im October 1859 eine Stelle als Lehrer bei der Realschule in Wehlau. Von da wurde er nach einem Jahre als sechster ordentlicher Lehrer an das neu gegründete, mit Realclassen verbundene Gymnasium zu Insterburg berufen, wo er am 20. October 1860 den Diensteid leistete. Während seiner dortigen Wirksamkeit bestand er zu Königsberg im Mai 1861 das Examen pro ministerio, ein Jahr darauf das Examen pro facultate docendi und bekleidete die Stelle in Insterburg so lange, bis er zur gedachten Zeit in das Lehrercollegium unseres Gymnasiums übertrat.

Unterm 23. December v. J. wurde der Berichterstatter von dem Königl. Provincialschulcollegium davon in Kenntniss gesetzt, dass der Herr Minister der geistlichen, Unterrichts- und Medicinal-Angelegenheiten mittelst Erlasses vom 16. desselb. Mts. an Gehaltsverbesserungen vom 1. Januar 1863 ab der zweiten und dritten ordentlichen Lehrerstelle unseres Gymnasiums je 50 Thlr., der fünften ordentlichen Lehrerstelle 100 Thlr., im ganzen also 200 Thlr. jährlich bewilligt und dazu einen neuen Zuschuss in gleicher Höhe aus Centralfonds der Anstalt überwiesen habe. Auch wurden unterm 18. April d. J. aus dem vorjährigen Bestande der Schulcasse vier Lehrern und dem Gymnasialdiener Unterstützungen gewährt und unterm 15. August d. J. die Remuneration des Rendanten der Gymnasialcasse von 72 Thlrn. auf 100 Thlr. jährlich erhöht. Für diese Fürsorge der hohen Staatsbehörden fühlt der Berichterstatter sich gedrungen denselben hier im Namen der Anstalt seinen tiefsten Dank auszusprechen.

Am 11. Merz d. J. wurde vor dem ganzen Lehrercollegium eine Prüfung aller sechs Classen des Gymnasiums im lateinischen gehalten und das Ergebniss derselben in der nächsten Conferenz besprochen.

Den 22. Merz, den Geburtstag Sr. Majestät des Königs, beging die Anstalt in gewohnter Weise mit einer öffentlichen Schulfeier, bei welcher der G. L. Dr. Witt die Festrede hielt.

Unterm 24. Merz wurde dem G. L. Schwarz als Zeichenlehrer zum Besuch der Königl. Kunstakademie in Königsberg vom 1. April bis zum 1. August ein viermonatlicher Urlaub ertheilt und ihm für diese Zeit aus Mitteln der Anstalt eine Unterstützung bewilligt. Zu seiner Stellvertretung war gleichzeitig der Schulamtsbewerber Wilhelm Gröning aus Scheppetschen Kirchspiels Didlacken bei Insterburg berufen, der ebenfalls aus Mitteln der Anstalt remunerirt wurde. Er hat mit Ausnahme des für die Zeit ausgefallenen Gesangunterrichts auf der oberen Singclasse von der Eröffnung des Sommerschulsemesters am 7. April bis zum Beginn der Sommerferien am 7. Juli sämtliche Lectionen des G. L. Schwarz mit Treue und Fleiss versehen und sich in unserem Kreise ein freundliches Andenken gestiftet.

Am 24. Mai, an welchem Tage vor hundert Jahren unser Gymnasialgebäude, neu erbaut, als Schulhaus eingeweiht worden ist, hielt der Berichterstatter nach der Morgenandacht vor den versammelten Lehrern und Schülern einen Vortrag, in welchem er durch einen geschichtlichen Rückblick auf jene Zeit die Bedeutung dieses Tages für das Gymnasium darzulegen suchte.

Nachdem am 5. Juni, dem 2. Sonntage nach Trinitatis, in der hiesigen altstädtischen Kirche die Einsegnung vollzogen war, nahm am 8. Juni, dem darauf folgenden Mittwoch, die Anstalt in dieser Kirche an der Feier des heiligen Abendmahls Theil.

Am 21. Juni beging das Gymnasium in Kallnen bei schönem Wetter und unter allgemeinem Frohsinn sein jährliches Schulfest.

In Folge des Ministerialerlasses über den Unterricht im zeichnen auf Gymnasien und Realschulen vom 2. October 1863 ist jetzt, nachdem unser Zeichenlehrer, der G. L. Schwarz, aus Königsberg zurückgekehrt, auch den Schülern der drei oberen Classen, die um des gewählten Berufes willen oder aus Neigung am Zeichenunterricht Theil zu nehmen wünschen, die Gelegenheit dazu geboten. Es sind für sie, da sich mehr freiwillige Theilnehmer zu diesem Unterricht gemeldet haben, als die Localien der unteren Classen aufnehmen können, zwei ausserordentliche Stunden wöchentlich angesetzt, und diese besuchen gegenwärtig aus Prima 1, aus Secunda 11, aus Tertia 12, in Summa 24.

Am 22. August fand unter dem Vorsitze des Königl. Provincialschulraths Dr. Schrader die Abiturientenprüfung statt. Von den fünf Abiturienten wurden zwei auf Grund des befriedigenden Ausfalls ihrer schriftlichen Arbeiten und wegen ihrer früheren Leistungen unter Entbindung von der mündlichen Prüfung einstimmig für reif erklärt, die drei andern wurden es nach abgelegter mündlicher Prüfung. Die Namen der abgehenden sind weiter unten in dem statistischen Abschnitte dieses Jahresberichts aufgeführt (IV. 2).

Während des ganzen Schuljahrs sind etwa fünf und dreissig Conferenzen gehalten worden, von denen die Fachconferenzen den Unterricht im griechischen auf Tertia, Secunda und Prima betrafen. Ausserdem vereinigte sich das Lehrercollegium im Wintersemester alle vierzehn Tage zu wissenschaftlichen Zusammenkünften.

Der Gesundheitszustand des Lehrercollegiums und der Schüler ist im Laufe dieses Schuljahrs ein im ganzen befriedigender gewesen. Nur der Lehrer unserer Vorbereitungsclasse Klein wurde am 13. Juni von einer Lungenentzündung befallen und hat an dieser Krankheit und den Nachwehen derselben so lange zu leiden gehabt, dass er vom 13. Juni bis zum 18. August ganz, von da ab bis zum 1. September theilweise ver-

treten werden musste. Diese Stellvertretung übernahm gegen eine Remuneration aus Mitteln der Anstalt der Schulamtsbewerber Ferdinand Wokulat von hier, der sich durch seine treue Hülfsleistung den wärmsten Dank der Anstalt erworben.

## II. Lehrverfassung.

### Vorbereitungsclasse.

Classenlehrer Klein.

1. Religion. 4 St. — 1. Abtheil. (mit entsprechender Betheiligung der beiden andern Abtheilungen): Die wichtigsten bibl. Geschichten des A. u. N. Testaments nach Woike; Bibelsprüche und Kirchenlieder. Das erste Hauptstück mit der lutherischen Erklärung, das zweite ohne dieselbe.

2. Deutsch. 7 St. — 3. Abtheil. Schreiblesen nach Hammers Lesefibel. 2. Abtheil. Leseübungen in deutscher und lateinischer Druckschrift nach Hammers Lesefibel. Orthograph. Uebungen durch abschreiben und dictiren. 1. Abtheil. Lesen in dem deutschen Lesebuche für das mittlere Kindesalter, herausgegeben von den Brüdern K. Seltzsam und L. Seltzsam; Uebungen im wiedererzählen und declamiren. Mündliche und schriftliche Uebungen in der Orthographie. Einübung der Redetheile, Declination des Nomens und Verbums, allgem. Kenntniss der Präpositionen.

3. Anschauungs- und Sprechübungen. 4 St. — 1. Abtheil. (mit entsprechender Betheiligung der beiden andern Abtheilungen): Erweiterung der Vorstellungen an sinnlichen Anschauungen mit Rücksicht auf Naturbeschreibung und Geographie.

4. Rechnen. 5 St. — 3. Abtheil. Die vier Species in dem Zahlenraum von 1 bis 15 nach Dagott. 2. Abtheil. Die vier Species in dem Zahlenraum von 1—30 nach Dagott. 1. Abtheil. Kopfrechnen: Die vier Species in dem Zahlenraum von 1—72 nach Dagott; Tafelrechnen: Wiederholung und Befestigung der vier Species in erweitertem Zahlenkreise; Einübung des kleinen Einmaleins.

5. Kalligraphie. 6 St. — 3. Abtheil. Einübung der kleinen Buchstaben des deutschen Alphabets. 2. Abtheil. Wiederholung dieser Uebungen und Einübung der grossen Buchstaben des deutschen Alphabets. 1. Abtheil. Einübung der kleinen und grossen Buchstaben des lateinischen Alphabets. Uebung in deutscher und lateinischer Schrift nach dem Tacte.

### Sexta.

Ordinarius: G. L. Hoppe. — Einjähriger Cursus.

1. Deutsch. 3 St. — J. Hopf und K. Paulsiek Leseb. 1. Thl. 1. Abtheil. Lesen, wiedererzählen und declamiren; orthograph. und grammat. Uebungen. — G. L. Hoppe.

2. Latein. 9 St. — Scheele Vorschule. Erste Abtheilung. Zusammenstellung des wichtigeren aus der Formenlehre. §. 1—12. Zweite Abtheilung. Uebungssätze zur Formenlehre. §. 1—23. G. L. Hoppe.

3. Religion. 3 St. — Biblische Geschichte des A. T. nach Kohlrausch. Das erste Hauptstück des luther. Katechismus und eine Auswahl hierauf bezüglicher Bibelsprüche; acht Kirchenlieder. — G. L. Trosien.

4. Rechnen. 4 St. — Die vier Species in unbenannten und benannten ganzen Zahlen und Brüchen. — G. L. Schwarz. (Vom 7. April — 7. Juli Schulamtsbewerber Gröning.)

5. Geographie. 2 St. — Das hauptsächlichste aus der mathemat. Geographie und die aussereuropäischen Erdtheile nach Weiss kurz. Unterricht. — G. L. Trosien.

6. Naturbeschreibung. 2 St. — Im W. Zoologie, im S. Botanik nach Samuel Schillings kleiner Schulnaturgeschichte. — G. L. Hoppe.

7. Kalligraphie. 3 St. — Nach Becker. — G. L. Schwarz. (Vom 7. April bis 7. Juli Schulamtsbew. Gröning.)

8. Zeichnen. 2 St. — G. L. Schwarz. (Vom 7. April — 7. Juli Schulamtsbew. Gröning.)

9. Gesang. 2 St. mit V. — Gehörsingübungen, Treffübungen; Choräle und Volkslieder. — G. L. Schwarz. (Vom 7. April — 7. Juli Schulamtsbew. Gröning.)

## Quinta.

Ordinarius: Dr. Witt. — Einjähriger Cursus.

1. Deutsch. 3 St. — J. Hopf und K. Paulsiek Leseb. 1. Thl. 2. Abthl. Lese-, Declamir- und orthograph. Uebungen; kleine Aufsätze; Präpositionen und Conjunctionen. — Dr. Witt.

2. Latein. 9 St. — Siberti-Meiring lat. Schulgrammatik. Die Formenlehre mit besonderer Berücksichtigung der Verba anomala und die wichtigsten syntakt. Regeln. Wöchentlich ein Exercitium. Lat. Elementarb. von Jacobs. 1. Bdch. Beispp. zu den Regeln vom Acc. c. Jnf. und Ablat. absol., I. 21—41, III. 50—70, IV. lib. IV. u. V. — Dr. Witt.

3. Französisch. 3 St. — Plötz Elementarb. Lect. 1—40. — Dr. Witt.

4. Religion. 3 St. — Biblische Geschichte des N. T. nach Kohlrausch. Das 2. und 3. Hauptstück des lutherischen Katechismus; acht Kirchenlieder. — G. L. Trosien.

5. Rechnen. 2 St. — Wiederholung der Bruchrechnungen; einfache und zusammengesetzte Verhältnissrechnung. — G. L. Schwarz. (Vom 7. April — 7. Juli Schulamtsbew. Gröning.)

6. Geometrische Anschauungslehre. 1 St. — G. L. Schwarz. (Vom 7. April — 7. Juli Schulamtsbew. Gröning.)

7. Geographie. 2 St. — Die Elemente der mathemat. Geographie und die Geographie von Europa mit besonderer Berücksichtigung Deutschlands nach E. v. Seydlitz. — G. L. Trosien.

8. Naturbeschreibung. 2 St. — Im W. Mineralogie, im S. Botanik nach Samuel Schillings kleiner Schulnaturgeschichte. — G. L. Hoppe.

9. Kalligraphie. 3 St. — Nach Becker. — G. L. Schwarz. (Vom 7. April bis 7. Juli Schulamtsbew. Gröning.)

10. Zeichnen. 2 St. — G. L. Schwarz. (Vom 7. April — 7. Juli Schulamtsbew. Gröning.)

11. Gesang. 2 St. mit VI. S. oben. — G. L. Schwarz. (Vom 7. April — 7. Juli Schulamtsbew. Gröning.)

## Quarta.

Ordinarius: Prof. Dewischeit. — Einjähriger Cursus.

1. Deutsch. 2 St. — J. Hopf und K. Paulsiek Leseb. 1. Thl. 3. Abthl. Aufsätze und Uebungen im declamiren; die Lehre von der Interpunction; einiges aus der Satzlehre. — Dr. Witt.

2. Latein. 10 St. — Wiederholung der Etymologie nebst den wichtigsten Regeln der Syntax, insbesondere der Syntaxis casuum nach Siberti-Meiring; wöchentliche Exercitien und Extemporalien. Cornelius Nepos (Thrasybulus, Conon, Dion, Iphicrates, Chabrias, Timotheus, Datames, Epaminondas, Pelopidas, Agesilaus). — Prof. Dewischeit.

3. Griechisch. 6 St. — Formenlehre bis zu den Verba in $\mu\iota$ inclus. nach Butttmann; kleine Exercitien; Jacobs Elementarb. 1. Cursus I, II u. III. mit Auswahl. — O. L. Dr. Kossak.

4. Französisch. 2 St. — Wiederholung des Pensums der Quinta; Einübung der Pronomina und regelm. Verba; Uebungen im übersetzen nach d. Elementarb. von Plötz. — Dr. Witt.

5. Religion. 2 St. — Erklärung des 1. u. 3. und Erlernung des 4. u. 5. Hauptstücks, so wie der zum 1. u. 3. gehörigen Bibelsprüche. Einprägung der Reihenfolge der biblischen Bücher. Lectüre des Ev. Lucä und Erlernung von ausgewählten Psalmen und von sieben Kirchenliedern. — G. L. Trosien.

6. Mathematik und Rechnen. 3 St. — Planimetrie bis zum Kreise; Decimalbrüche, Wurzeln. — Zusammengesetzte Regel de Tri. — G. L. Schwarz. (Vom 7. April — 7. Juli Schulamtsbew. Gröning.)

7. Geschichte und Geographie. 3 St. — Geschichte der Griechen und Römer nach dem Grundrisse der alten Geschichte von F. Voigt. — Geographie der aussereuropäischen Erdtheile nach E. v. Seydlitz. — O. L. Dr. Kossak.

8. Zeichnen. 2 St. — G. L. Schwarz. — (Vom 7. April — 7. Juli Schulamtsbew. Gröning.)

9. Gesang. 2 St., davon 1 mit III und 1 mit III, II u. I. — Mehrstimmige Gesänge. — G. L. Schwarz.

### Tertia.

Ordinarius: O. L. Dr. Kossak. — Zweijähriger Cursus.

1. Deutsch. 2 St. — Monatliche Aufsätze nach vorheriger Besprechung des Themas; Uebungen im declamiren und freien Vortrage; Lectüre und Erklärung von Gedichten mit Berücksichtigung der Metrik; mündliche und schriftliche Uebungen im unterscheiden von Synonymen. — G. L. Trosien.

2. Latein. 10 St. — Syntax nach Zumpt; wöchentliche Exercitien und Extemporalien. Cäsar B. G. II, III u. IV, B. C. I. c. 30—60. Privatlectüre der Obertertianer aus Justinus und Cornelius Nepos. Ovid Metamorph. in dem Auszuge von G. K. F. Seidel V u. VI. Stellen memorirt. Metrische Uebungen. — O. L. Dr. Kossak.

3. Griechisch. 6 St. — Wiederholung der Etymologie mit Berücksichtigung des ionischen Dialekts und die Hauptregeln der Syntax, insbesondere der Syntaxis casuum nach Buttmann; alle vierzehn Tage ein Exercitium; Extemporalien; loci memoriales. Xenophon Anabasis VII. c. 3 bis zum Ende des Buches und I. c. 1—4. Homer Odyssee XXI. 226 bis zum Ende des Buches, XXII, XXIII u. XXIV. 1—105. — Prof. Dewischeit.

4. Französisch. 2 St. — Formenlehre bis zur zweiten Conjugation der unregelmässigen Verba inclus. nach Müller 1. Abthl.; alle vierzehn Tage ein Exercitium; Voltaire Charles XII. liv. IV u. V (zur grössern Hälfte). Regelmässiges memoriren gelesener Stellen. — G. L. Hoppe.

5. Religion. 2 St. — Lectüre und Erklärung ausgewählter Stücke des A. T. Erklärung des zweiten Hauptstücks. Erlernung von Bibelsprüchen und von sechs Kirchenliedern. — G. L. Trosien.

6. Mathematik. 3 St. — Grunert für die mittleren Classen. 2 St. Arithmetik, 1 St. Geometrie. Lösung erläuternder Aufgaben. — Prof. Sperling.

7. Geographie. 1 St. — Deutschland und die Staaten des östlichen und nördlichen Europas nach E. v. Seydlitz. — O. L. Dr. Basse.

8. Geschichte. 2 St. — Die deutsche Geschichte vom westfälischen Frieden

ab, angeschlossen an die brandenburgisch-preussische Geschichte von 1640—1815. — O. L. Dr. Basse.

9. Naturkunde. 2 St. — Die Hauptlehren der Physik. (Zweite Hälfte des Cursus.) — Prof. Sperling.

10. Gesang. 2 St., davon 1 mit IV und 1 mit IV, II u. I. S. oben. G. L. Schwarz.

11. Zeichnen. 2 St. mit II u. I. (12 freiwillige Theilnehmer.) S. die Schulchronik. — G. L. Schwarz.

## Secunda.

Ordinarius: O. L. Dr. Basse. — Zweijähriger Cursus.

1. Deutsch. 2 St. — Die hervorragenderen Partien der deutschen Litteraturgeschichte von dem Zeitalter der Reformation bis auf Schiller. Uebungen im disponiren, declamiren und im freien Vortrage. Aufsätze über folgende Themata:

1) Die Kirch' ist ein Bau von Steine
Und, einsam, ein Todtengraus;
Die versammelte Gemeine
Nur macht sie zum Gotteshaus. Rückert.
2) Liebe die Heimat, schätze die Fremde.
3) Opitz und Andreas Gryphius. Ein Vergleich der Verdienste beider um Sprache und Poesie.
4) Die französischen Gesandten am Hofe Elisabeths in Schillers Maria Stuart.
5) Ein Lobredner vergangener Zeiten. In Gesprächsform.
6) Zieh was bevorsteht und vergangen ist zu Rath,
Und sei wie jener Gott, der zwei Gesichter hat. Opitz.
7) König Thoas Agamemnons Kindern gegenüber in der Schlussscene von Göthes Iphigenie.
8) Datames im Kampfe gegen die Pisider nach Nepos Datames c. 6.
9) a. Des Laokoon Rath und Bestrafung nach Vergils Aeneis II. 40 ff.
b. Ueber den Unterschied zwischen dem lesen aus langer Weile und dem ernsten lesen.
10) Wie wird die Kraft des Menschen durch die Natur ergänzt und ersetzt?
11) Der Charakter des Pylades in Göthes Iphigenie. Rede.

— Prof. Dewischeit.

2. Latein. 10 St. — Wiederholung der regelmässigen Syntax nach Zumpt §. 326—671; wöchentliche Exercitien und Extemporalien; metrische Uebungen; Aufsätze der Obersecundaner über folgende Themata:

1) Marium et Ciceronem, duos viros Arpinates, rempublicam Romanam ex maximis periculis alterum bello, alterum pace liberasse.
2) De rebus a Cn. Pompeio gestis, antequam bello Mithridatico praeficeretur.
3) Quomodo post ignominiam Caudinam Romani amissum militare decus vindicaverint enarretur (Liv. IX. 7—16).
4) Tempore omnia mutantur (Verss. elegiaci).
5) Uter melius de patria meruerit, Themistocles an Aristides.
6) Quanta sit fortunae inconstantia exemplis demonstretur ex antiquitate petitis.

Livius VIII u. IX, Cicero Or. de imperio Cn. Pompeii, M. Seyfferts Lesestücke III. 24—30. Privatlectüre aus Cicero, Sallust und Livius. Aus Cicero, Livius und Cornelius Nepos wurden ausgewählte Stellen memorirt. 8 St. — O. L. Dr. Basse. Vergil Aeneis I u. II. Stellen memorirt. 2 St. — Der Director.

3. Griechisch. 6 St. — Syntax nach Buttmann und Dictaten; alle vierzehn Tage ein Exercitium; Extemporalien; Lysias Rede über den Oelbaum, gegen die Getreidehändler, für Mantitheos, gegen Eratosthenes, zur Abwehr der Theilnahme an der Herrschaft der Dreissig, gegen Philon. 4 St. — Dr. Waas. Homer Odyssee XXI u. XXII, Ilias III u. IV. Privatlectüre der Obersecundaner aus Homer. 2 St. — Der Director.

4. Französisch. 2 St. — Syntax nach Müller 2. Abthl. bis zum Gebrauch der Tempora inclus.; alle vierzehn Tage ein Exercitium. L. Ideler und H. Nolte Handb. d. franz. Sprache und Litteratur 3 Thl. Dumouriez, Ligne, Bernardin de Saint-Pierre, Larochefoucauld-Liancourt, Péron, Barante. Regelmässiges memoriren gelesener Stellen. — G. L. Hoppe.

5. Hebräisch. 2 St. — Elementarlehre, Substantivum, Verbum nach Gesenius-Rödiger. 1. Mos. 3, 6, 7, 8, 22. — Dr. Waas.

6. Religion. 2 St. — Einleitung in die Schriften des N. T. und Besprechung des Inhalts derselben nach Hollenberg §. 47—91. Lectüre der Apostelgeschichte im Grundtext c. 1—18. — G. L. Trosien.

7. Mathematik. 4 St. — Grunert für die oberen Classen. Goniometrie und Sätze der Trigonometrie, dann Beendigung der Planimetrie. Aufgaben zur Erläuterung und Einübung; alle vierzehn Tage eine häusliche Arbeit. — Prof. Sperling.

8. Physik. 1 St. — Schall und Wärme nach Koppe. — Prof. Sperling.

9. Geographie. 1 St. — Die aussereuropäischen Erdtheile nach E. v. Seydlitz. — O. L. Dr. Basse

10. Geschichte. 2 St. — Alte Geschichte mit Ausschluss der römischen nach R. Dietsch. — O. L. Dr. Basse.

11. Gesang. 2 St., davon 1 mit I und 1 mit IV, III u. I. S. oben. — G. L. Schwarz.

12. Zeichnen. 2 St. mit III und I. (11 freiwillige Theilnehmer). S. die Schulchronik. — G. L. Schwarz.

## Prima.

Ordininarius: der Director. — Zweijähriger Cursus.

1. Deutsch und philosoph. Propädeutik. 3 St. — Psychologie. Geschichte der deutschen Litteratur bis zum Zeitalter der Reformation. Disponirübungen. Aufsätze über folgende Themata:

1) Die Glocke. Gedanken bei der Besteigung eines Thurms.
2) Nur der Irrthum ist das Leben,
Und das wissen ist der Tod.
3) Der Mensch und das Meer.
4) Platons Apologie des Sokrates Cap. 1 u. 2 ins deutsche übersetzt.
5) Es ziemt dem Manne
Auch willig das beschwerliche zu thun.
6) a. Welche Züge vereinigt die Apologie Platons zu dem Bilde von Sokrates Persönlichkeit?
(b. Sokrates in seinen allgemein menschlichen Beziehungen. Nach Platons Apologie.)
7) Welcher Werth kommt den gymnastischen Uebungen zu?
8) Woran mahnt uns das Memento mori?
9) Eine Stelle aus Sophokles Antigone — metrisch oder in ungebundener Rede — ins deutsche übersetzt. — Dr. Waas.

2. Latein. 8 St. — Stilistik; Exercitien und Extemporalien; metrische Uebungen; freie Vorträge und Aufsätze, die letztern über folgende Themata:

1) a. Codri regis mors voluntaria cum Deciorum vitae devotione comparetur.

b. Demonstretur verum esse illud C. Mucii Scaevolae: Et facere et pati fortia Romanum est.

2) Exponatur quomodo factum sit, ut Romae tribuni plebis crearentur.

3) Examinetur illud Ciceronis: Talis fuit Fabricius Romae, qualis Aristides Athenis.

4) Explicetur quod ait Velleius: Potentiae Romanorum prior Scipio viam aperuerat, luxuriae posterior aperuit.

5) Ex litteris antiquis quaestio ponatur in epistula ad praeceptorem data.

6) — — — — Nil sine magno Vita labore dedit mortalibus. Horat. Sat. I. 9, 59. Chrie.

7) u. 8) - denn die Arbeit wurde auf zwei Monate vertheilt — Jure Ennius sanctos appellat poetas. Cic. p. Archia poeta 8, 18. Chrie.

9) (Classenarbeit) De Socratis vita et discessu e vita.

10) (Zuvor Abituriententhema) Urbem Romam Romulus condidit, Camillus restituit, Cicero servavit.

Cicero de oratore I und Tacitus Annalen I, Horaz Oden III, IV und Carm. saeculare. Viele Oden wurden memorirt. Privatim lasen von den ältern Primanern einige Ciceros Brutus, andere den Orator, die jüngern verschiedene Reden Ciceros und einige von ihnen auch Ciceros Cato maior. — Der Director.

3. Griechisch. 6 St. — Wiederholung der Syntax; Exercitien und Extemporalien. Platons Apologie und Kriton. Homer Ilias X—XIII, Sophokles Antigone. Privatlectüre aus Homer. — Dr. Waas.

4. Französisch. 2 St. — Syntax nach Müller 2. Abthl. bis zur Lehre vom Adverbium inclus.; alle vierzehn Tage ein Exercitium. Im W. Racines Iphigénie, im S. L. Ideler und H. Nolte Handb. d. franz. Sprache und Litteratur 3. Thl. Staël-Holstein, Daru, Constant. Regelmässiges memoriren gelesener Stellen. — G. L. Hoppe.

5. Hebräisch. 2 St. — Wiederholung der Etymologie und die Syntax bis zum Verbum nach Gesenius-Rödiger. 1. Sam. 7—20. — Dr. Waas.

6. Religion. 2 St. — Geschichte der christlichen Kirche bis zum augsburger Religionsfrieden nach Hollenberg. Lectüre und Erklärung der Epistel Pauli an die Römer im Grundtext c. 1—7. — G. L. Trosien.

7. Mathematik. 4 St. — Grunert für die oberen Classen. Syntaktik. Beendigung der Stereometrie und analytische Geometrie. Alle drei Wochen eine häusliche Arbeit. Uebungen im lösen von Aufgaben unter Aufsicht und Leitung des Lehrers. — Prof. Sperling.

8. Physik. 2 St. — Mechanische Erscheinungen flüssiger und fester Körper nach Koppe. — Prof. Sperling.

9. Geschichte und Geographie. 3 St. — Die neuere Geschichte nach R. Dietsch. Wiederholung der physischen und politischen Geographie von Europa nach E. v. Seydlitz. — O. L. Dr. Basse.

10. Gesang. 2 St., davon 1 mit II und 1 mit IV, III u. II. S. oben. — G. L. Schwarz.

11. Zeichnen. 2 St. mit III und II. (1 freiwilliger Theilnehmer). S. d. Schulchronik. — G. L. Schwarz.

Die Turnübungen, von denen Dispensation nur auf Grund eines ärztlichen Attestes stattfindet, wurden im Sommer (Mittwoch und Sonnabend nachmittags) mit Be-

obachtung der darüber von dem Königlichen Provinzialschulcollegium unterm 19. April 1861 erlassenen Verfügung durch den O. L. Dr. Kossak geleitet. Leider sind sie in diesem Jahre oft durch einfallendes Regenwetter gestört.

## III. Abiturientenaufgaben.

Unsere im August d. J. geprüften Abiturienten haben zu ihren grösseren schriftlichen Arbeiten folgende Aufgaben gehabt:

1. Thema zum deutschen Aufsatz: Was ist dem Menschen die Natur?
2. Thema zum lateinischen Aufsatz: Urbem Romam Romulus condidit, Camillus restituit, Cicero servavit.
3. Mathematische Aufgaben: 1) Zur Construction eines Dreiecks sind zwei von der Spitze auslaufende Transversalen a und b, welche die Grundlinie in drei gleiche Theile theilen, und der Winkel $\alpha$ an der Spitze gegeben.

2) Aus dem Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \text{I.}\quad & 3\,[x^3+2xyz] + 2\,[2y^3+3xyz] = 107 \\ \text{II.}\quad & 2\,[2y^3+3xyz] + 1.\,[3z^3-xyz] = 143 \text{ und} \\ \text{III.}\quad & 1.\,[3z^3-xyz] + 3\,[x^3+2xyz] = 114 \end{aligned}$$

x, y und z zu berechnen.

3) Aus einem Puncte über derselben Horizontalebene, worauf ein Gegenstand von unbekannter Höhe sich befindet, erscheint diese Höhe in der Entfernung a unter dem Winkel $\alpha$, dagegen aus einem um d höheren Puncte und in der Entfernung b gesehen, unter dem Winkel $\beta$. Wie lässt sich aus diesen fünf bekannten Stücken die Höhe x des Gegenstandes berechnen?

4) Die verschiedensten concentrischen Kugeln, welche von zwei parallelen Ebenen in gleichem Abstande vom Mittelpuncte durchschnitten sind, geben Platten von gleichem wulstförmigem Ringumfange, und zwar an Inhalt gleich der Kugel, welche jenen Abstand zum Radius hat. Dies soll bewiesen werden.

## IV. Statistik.

### A. Lehrer.

Den gegenwärtigen Bestand des Lehrercollegiums ergiebt die tabellarische Uebersicht über die Vertheilung der Lehrstunden im Schuljahre 1863—64 auf der vorletzten Seite dieses Jahresberichts.

### B. Schüler.

1. Im September v. J. belief sich die Frequenz der Anstalt auf 272 (S. 24 des vorjährigen Programms). Dieselbe stieg im Winterhalbjahr 1863—64 auf 280 und hat sich bei fast gleichem Ab- und Zugang beinahe das ganze Schuljahr hindurch in dieser Zahl gehalten. Auch gegenwärtig, im September, wird die Anstalt von 280 Schülern besucht, die sich auf die einzelnen Classen also vertheilen, dass wir 19 Primaner, 28 Secundaner, 57 Tertianer, 46 Quartaner, 42 Quintaner, 39 Sextaner und 49 Schüler der Vorbereitungsclasse haben.

2. Zu Michael d. J. werden folgende Primaner mit dem Zeugnisse der Reife von dem Gymnasium entlassen:

1) Carl David Richard Arnoldt, geb. in Gumbinnen, $18^3/_4$ J. alt, evang. Confession, Sohn des Gymnasialdirectors Arnoldt in Gumbinnen, 10 J. Schüler der Anstalt von Sexta ab, 2 J. in Prima; er beabsichtigt in Bonn Philologie zu studiren.
2) Johann August Hermann Dittrich, geb. in Gollubien Kr. Oletzko, $18^3/_4$ J. alt, evang. Confession, Sohn des in Gollubien verstorbenen Gutsbesitzers Dittrich, $5^1/_2$ J. Schüler der Anstalt von Tertia ab, 2 J. in Prima; er beabsichtigt in Jena Jura zu studiren.

3) Friedrich Wilhelm Embacher, geb. in Gumbinnen, 21 J. alt, evang. Confession, Sohn des in Gumbinnen verstorbenen Mälzenbräuers Embacher, 9 J. Schüler der Anstalt von Quinta ab, 2 J. in Prima; er beabsichtigt in Königsberg Geschichte zu studiren.
4) Caıl Friedrich Hoffmann, geb. in Gumbinnen, 21 J. alt, evang. Confession, Sohn des Bäckermeisters Hoffmann in Gumbinnen, 8 J. Schüler der Anstalt von Quarta ab, 2 J. in Prima; er beabsichtigt in Königsberg Medicin zu studiren.
5) Carl Ludwig Ferdinand Kampf, geb. in Allenburg, 22½ J. alt, evang. Confession, Sohn des Schlossermeisters Kampf in Allenburg, 4¼ J. Schüler der Anstalt von Tertia ab, 2 J. in Prima; er beabsichtigt in Königsberg Mathematik und Astronomie zu studiren.

## V. Bibliotheken und andere Sammlungen.

Die Bibliotheken und anderen Sammlungen der Anstalt sind aus den dazu verfügbaren Mitteln in gewohnter Weise vervollständigt und erweitert worden. Die Lehrerbibliothek ward auch in diesem Jahre von dem Herrn Minister der geistlichen, Unterrichts- und Medicinal-Angelegenheiten durch Büchergeschenke, namentlich durch die Fortsetzungen bedeutender und kostbarer Werke bereichert, und das Lehrercollegium dadurch zu ehrerbietigem Danke verpflichtet.

## VI. Amtliche Verordnungen von allgemeinerem Interesse.

1. Vom 2. October v. J. Nach dem Ministerialerlasse vom 24. September 1863 haben die mit den Gymnasien und Realschulen verbundenen Vorbereitungsclassen sich auf den allgemeinen Elementarunterricht zu beschränken und fremde Sprachen, das lateinische sowol als das französische, von ihrem Lehrplan auszuschliessen.

2. Vom 9. November v. J. Mittheilung des neuen Reglements für den Unterricht im zeichnen auf Gymnasien und Realschulen vom 2. October 1863. In den Bemerkungen zu diesem Reglement heisst es unter Nr. 10: „In den Gymnasien ist der Zeichenunterricht nach dem bestehenden Lehrplan nur bis Quarta inclus. obligatorisch. Es kann hierin bei aller Hochschätzung des zeichnens als eines allgemeinen Bildungsmittels in Rücksicht auf die übrigen Aufgaben des Gymnasiums nichts geändert werden. Aber die Schüler der oberen Classen, die um des gewählten Berufs willen oder aus Neigung ferner am Zeichenunterricht Theil nehmen wollen, müssen dazu Gelegenheit haben. . . . . . Es ist in dieser Beziehung zweckmässig, dass die Gymnasialdirectoren den Schülern der betreffenden oberen Classen, so oft es erforderlich scheint, von der ihnen gebotenen Gelegenheit Kenntniss geben; ferner dass, wenn mehr Schüler der oberen Classen sich zur freiwilligen Theilnahme am Zeichenunterricht melden, als das Local beim Unterricht der unteren Classen aufnehmen kann, oder wenn andere Umstände eine Theilnahme der Schüler höherer Classen an den Zeichenstunden der unteren unthunlich machen, auf Ansetzung ausserordentlicher Stunden angetragen wird, in denen die Schüler höherer Classen nach ihrer Entwickelung und ihren Zwecken gemäss angeleitet werden können."

3. Vom 31. December v. J. In Bezug auf das abgehenden Secundanern zu ertheilende Berechtigungsattest zum einjährigen freiwilligen Militärdienst bestimmt der nachträgliche Ministerialerlass vom 21. December 1863: „Durch die Circularverfügung vom 31. October 1861 ist angeordnet, dass bei den Gymnasien und den Realschulen erster Ordnung die Abgangszeugnisse für die nach dem ersten halben Jahr aus Secunda abgehenden Schüler jedesmal von der Lehrerconferenz festgestellt werden, und dass darin ausdrücklich bemerkt wird, ob der betreffende Schüler sich das bezügliche Pensum der Secunda gut angeeignet und sich gut betragen hat. . . . . . Die Bestimmung, dass derartige Zeugnisse von der Lehrerconferenz festzustellen sind, gilt auch für die

Fälle, wo die betreffenden jungen Leute nach einem längern als halbjährigen Aufenthalt aus der Secunda abgehen."

4. Vom 12. Februar d. J. Der Herr Minister der geistlichen, Unterrichts- und Medicinal-Angelegenheiten hat genehmigt, „dass in unserer Provinz von drei zu drei Jahren in Königsberg eine Conferenz der Directoren sämtlicher Gymnasien und Realschulen unter Leitung der beiden Departementsräthe stattfinde."

5. Vom 4. April d. J. Statt der etatsmässigen Versetzungsgelder sollen für die Schülerbibliothek von Ostern d. J. ab zehn Silbergroschen jährlich von jedem zahlungspflichtigen und zahlungsfähigen Schüler des hiesigen Gymnasiums in Quartalsraten erhoben werden.

6. Vom 23. Mai d. J. In Folge des Ministerialerlasses vom 18. Mai 1864 werden die Directoren der Gymnasien und Realschulen angewiesen, dass sie diejenigen Schüler, welche später auf das Gewerbe-Institut überzugehen beabsichtigen, bei Zeiten auf das daselbst unerlässliche Erforderniss einer genügenden Fertigkeit im Freihand- und Linearzeichnen aufmerksam machen und den Zeichenlehrern empfehlen sich der betreffenden Schüler in dieser Beziehung besonders anzunehmen.

7. Vom 1. Juni d. J. Die von dem Herrn Finanzminister unterm 7. Februar 1864 erlassenen allgemeinen Bestimmungen über Ausbildung und Prüfung für den Königl. Forstverwaltungsdienst enthalten unter anderen folgende Festsetzungen. „Die Zulassung für den Königl. Forstverwaltungsdienst kann nur demjenigen gestattet werden, welcher 1) das Zeugniss der Reife als Abiturient von einem preussischen Gymnasium oder von einer preussischen Realschule erster Ordnung erlangt und in diesem Zeugnisse eine unbedingt genügende Censur in der Mathematik erhalten, 2) das 23ste Lebensjahr noch nicht überschritten hat, 3) eine namentlich in Beziehung auf das Seh- und Hörvermögen fehlerfreie, kräftige, für die Beschwerden des Forstdienstes angemessene Körperbeschaffenheit besitzt, 4) über tadellose sittliche Führung sich ausweist und 5) den Nachweis der zur forstlichen Ausbildung erforderlichen Subsistenzmittel führt."

# Tabellarische Uebersicht

über die Vertheilung der Lehrstunden im Schuljahre 1863—64.

| Namen der Lehrer. | VI. | V. | IV. | III. | II. | I. | Summa. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. Prof. Dr. Arnoldt, Director. Ord. I. | | | | | 2 Vergil. 2 Homer. | 8 Latein. | 12. |
| 2. Prof. Sperling, 1. Oberl. | | | | 3 Mathematik. 2 Naturkunde. | 4 Mathematik. 1 Physik. | 4 Mathematik. 2 Physik. | 16. |
| 3. Prof. Dewischeit, 2. Oberl. Ord. IV. | | | 10 Latein. | 6 Griechisch. | 2 Deutsch. | | 18. |
| 4. Dr. Kossak, 3. Oberl. Ord. III. | | | 6 Griechisch. 3 Geographie und Geschichte. | 10 Latein. | | | 19. |
| 5. Dr. Basse, 4. Oberl. Ord. II. | | | | 2 Geschichte. 1 Geographie. | 8 Latein. 2 Geschichte. 1 Geographie. | 3 Geschichte und Geographie. | 17. |
| 6. Dr. Waas, 1. ord. L. | | | | | 4 Griechisch. 2 Hebräisch. | 3 Deutsch. 6 Griechisch. 2 Hebräisch. | 17. |
| 7. Religionslehrer Trosien, 2. ord. L. | 3 Religion. 2 Geographie. | 3 Religion. 2 Geographie. | 2 Religion. | 2 Religion. 2 Deutsch. | 2 Religion. | 2 Religion. | 20. |
| 8. Dr. Witt, 3. ord. L. Ord. V. | | 10 Latein. 2 Deutsch. 3 Französisch. | 2 Deutsch. 2 Französisch. | | | | 19. |
| 9. Hoppe, 4. ord. L. Ord. VI. | 9 Latein. 3 Deutsch. 2 Naturbeschreibung. | 2 Naturbeschreibung. | | 2 Französisch. | 2 Französisch. | 2 Französisch. | 22. |
| 10. Schwarz, 5. ord. L. | 4 Rechnen. 3 Kalligraphie. 2 Zeichnen. | 2 Rechnen. 1 Geometr. Anschauungslehre. 3 Kalligraphie. 2 Zeichnen. | 1 Rechnen. 2 Mathematik. 2 Zeichnen. | 2 Zeichnen. S. d. Schulchronik. (III.—I. zusammen) | | | 27. (29.) |
| | 2 Gesang. (VI. und V. zusammen) | | 3* Gesang. (IV.—I. zusammen) | | | | |

11. Klein,
Lehrer der Vorbereitungsclasse: 4 Religion, 7 Deutsch (inclus. Lesen), 4 Anschauungs- und Sprechübungen, 5 Rechnen, 6 Kalligraphie. = 26 Stunden.

* Die obere Singclasse ist nämlich in 2 Cötus getheilt, von denen der eine aus Quartanern und Tertianern, der andere aus Secundanern und Primanern besteht. Der Gesanglehrer ertheilt jedem Cötus eine Stunde besonders und eine Stunde beiden Cötus zusammen, so dass in dieser Singclasse er 3 Stunden giebt, die Schüler aber nur 2 Stunden haben. Die beiden besonderen Stunden fallen innerhalb der gewöhnlichen Schulzeit, die gemeinschaftliche Stunde ausserhalb derselben (Mittwoch von 12—1).

# Oeffentliche Prüfung.

Die öffentliche Prüfung sämtlicher Classen der Anstalt wird **Donnerstag**, den 29., u. **Freitag**, den 30. **September**, in folgender Ordnung abgehalten werden.

**Donnerstag, den 29. September.**

Vormittags 9—12 Uhr.

Vierstimmiger Choral.

1. (9—10) **Vorbereitungsclasse:** Lesen. Classenlehrer Klein.
   Rechnen. Derselbe.
2. (10—11) **Sexta:** Latein. G. L. Hoppe.
   Geographie. G. L. Trosien.
3. (11—12) **Quinta:** Latein. Dr. Witt.
   Rechnen. G. L. Schwarz.

Zwischen den einzelnen Lectionen werden Declamationen eingeschaltet.

Nachmittags 2½—4½ Uhr.

4. (2½—3½) **Quarta:** Griechisch. O. L. Dr. Kossak.
   Geometrie. G. L. Schwarz.
5. (3½—4½) **Tertia:** Griechisch. Prof. Dewischeit.
   Naturkunde. Prof. Sperling.

Zwischen den einzelnen Lectionen werden Declamationen eingeschaltet

Vierstimmiger Psalm.

**Freitag, den 30. September.**

Vormittags 9—1 Uhr.

Vierstimmiger Psalm.

6. (9—10½) **Secunda:** Latein. O. L. Dr. Basse.
   Französisch. G. L. Hoppe.
   Deutsche Rede des Obersecundaners Heinrich Matzat.
7. (10½—12) **Prima:** Griechisch. Dr. Waas.
   Lateinische Rede des Primaners Otto Hotop.
   Religion. G. L. Trosien.
8. (12—1) Abschiedsrede des Abiturienten Richard Arnoldt; Erwiederung des Primaners Friedrich Bergenroth.
   Entlassung der Abiturienten durch den Director.

Schlusschoral.

---

Am Nachmittag um 3 Uhr werden den in der Aula versammelten Schülern die Versetzungen bekannt gemacht und dann den einzelnen Classen in ihren Localen die Censuren ausgetheilt.

---

Das neue Schuljahr beginnt Donnerstag, d. 13. October. Zur Prüfung und Inscription neu eintretender Schüler bin ich vom 5. October ab mit Ausnahme des Sonntags jeden Vormittag von 10 Uhr an bereit.

Dr. **J. Arnoldt.**